АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 581 - 587

УДК 534.13

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

© 1994 г. И. П. Гетман, Н. В. Курбатова

Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики Ростовского госуниверситета
344104 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1

Поступила в редакцию 07.09.93 г.

На основе метода конечных элементов, в котором функции формы для прямоугольного элемента удовлетворяют уравнениям движения, исследуются планарные колебания тонких прямоугольных пьезоэлектрических пластин. Численно определяются резонансные частоты, собственные формы колебаний, распределение суммы главных напряжений и другие характеристики, играющие важную роль при расчете и проектировании пьезотрансформаторов и пьезоэлектрических резонаторов.

Рассмотрим планарные колебания в плоскости пьезокерамической прямоугольной пластины длиной A и шириной B (рис. 1), поляризованной по толщине ($2h$) вдоль оси Z. Возбуждение колебаний осуществляется разностью потенциалов $2V_0$, приложенной к электродам, покрывающим плоские поверхности пластины.

$$2(1+q)\frac{d^2u}{dx^2}+(1-\nu)\frac{d^2u}{dy^2}+(1+\nu+2q)\frac{d^2v}{dxdy}+$$
$$+2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2u=0,$$
$$(1+\nu+2q)\frac{d^2u}{dxdy}+(1-\nu)\frac{d^2v}{dx^2}+2(1+q)\frac{d^2v}{dy^2}+ \quad (1)$$
$$+2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2v=0,$$

где u, v – компоненты вектора перемещений вдоль оси x и y соответственно, $\nu=-S_{12}^E/S_{11}^E$ – коэффициент Пуассона, S_{11}^E, S_{12}^E – податливости, ρ – плотность. Величина $q=0$, если лицевые поверхности электродированы и $q=0.5(1+\nu)K_p^2/(1-K_p^2)$, если лицевые поверхности свободны от электродов [1]. Решение уравнений (1) может быть представлено в виде

$$u=b_1(\cos(ry)+c\sin(ry))(\cos(gx)+k\sin(gx)),$$
$$v=b_2(\sin(ry)-c\cos(ry))(\sin(gx)-k\cos(gx)), \quad (2)$$

где c, k – произвольные постоянные, а константы b_1, b_2 связаны между собой алгебраической системой уравнений

$$(2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2-2(1+q)g^2-(1-\nu)r^2)b_1+$$
$$+(1+\nu+2q)rgb_2=0,$$
$$(1+\nu+2q)rgb_1+(2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2- \quad (3)$$
$$-2(1+q)g^2-(1-\nu)r^2)b_2=0.$$

Из условия разрешимости последней следует уравнение, связывающее r, g, ω:

$$(2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2-2(1+q)g^2-(1-\nu)r^2)\times$$
$$\times(2S_{11}^E(1-\nu^2)\rho\omega^2-(1-\nu)g^2-2(1+q)r^2)- \quad (4)$$
$$-(1+\nu+2q)^2r^2g^2=0.$$

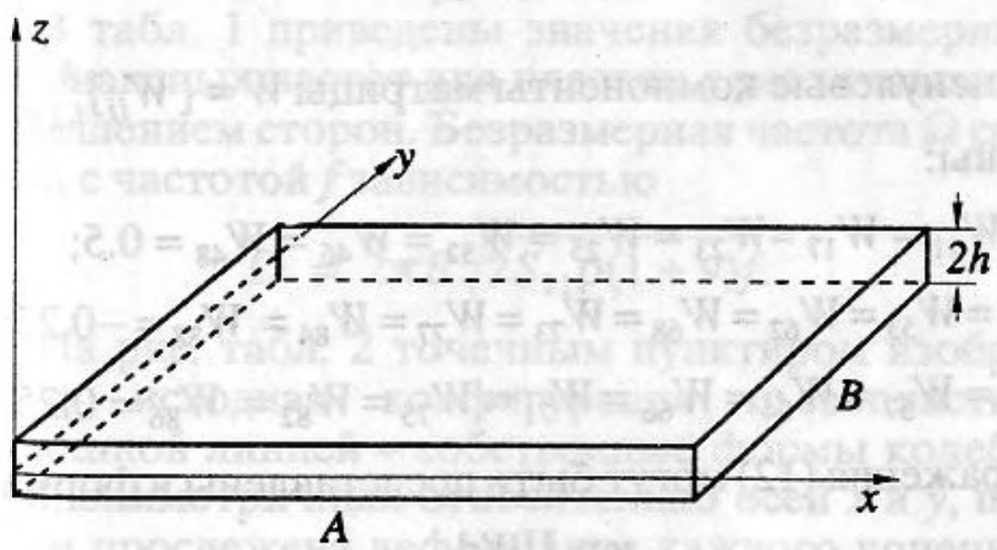


Рис. 1.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент размерами a и b, имеющий восемь степеней свободы, как указано на рис. 2.

Для построения функций формы, связывающих перемещения во внутренних точках элемента с перемещениями его угловых точек, воспользуемся имеющимся произволом в представлении решения (2).

Рис. 2.

Положим в соотношениях (2) $r = 0$. В этом случае уравнение (4) имеет два корня:

$$g_1 = \omega\sqrt{\rho S_{11}^E (1-\nu)^2/(1+q)},$$
$$g_2 = \omega\sqrt{2\rho S_{11}^E (1+\nu)}, \tag{5}$$

соответствующих распространению продольных и поперечных волн в направлении оси x. При этом первому корню соответствует в системе (3) решение $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$, которое имеет следующий вид:

$$u = A_1 (\cos(g_1 x - \mathrm{ctg}(g_1 a)\sin(g_1 x)) + A_2 \sin(g_1 x)/\sin(g_1 a), \tag{6}$$
$$v = 0.$$

А значению g_2 ($b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$) соответствуют решения

$$u = 0,$$
$$v = A_6 (-\cos(g_2 x) + (1+\cos(g_2 a))/\sin(g_2 a)\sin(g_2 x)). \tag{7}$$

Аналогичный результат получаем, рассматривая систему (3) для $g = 0$. Приведенные ниже решения описывают сдвиговые

$$u = A_5 (-\cos(r_1 y) + (1+\cos(r_1 b)/\sin(r_1 b))\sin(r_1 y)), \tag{8}$$
$$v = 0, \quad r_1 = g_2$$

и продольные

$$u = 0,$$
$$v = A_3 (\cos(r_2 y) - \mathrm{ctg}(r_2 b)\sin(r_2 y)) + A_4 \sin(r_2 y)/\sin(r_2 b), \tag{9}$$
$$r_2 = g_1$$

колебания элемента.

Для устранения оставшегося произвола рассмотрим случай $r = g$ в уравнении (4). Соответствующие решения могут быть представлены в виде [2, 3]

$$u = A_7 [c_2 k_2 (\cos(t_1 y) + c_1 \sin(t_1 y)) \times (\cos(t_1 x) + k_1 \sin(t_1 x)) + c_1 k_1 (\cos(t_2 y) + c_2 \sin(t_2 y))(\cos(t_2 x) + k_2 \sin(t_2 x)]/W^*,$$
$$v = A_7 [-c_2 k_2 (\sin(t_1 y) - c_1 \cos(t_1 y)) \times (\sin(t_1 x) - k_1 \cos(t_1 x)) + c_1 k_1 (\sin(t_2 y) - c_2 \cos(t_2 y))(\sin(t_2 x) - k_2 \cos(t_2 x)]/W^*, \tag{10}$$

или

$$u = A_7 F_1(x, y),$$
$$v = A_7 F_2(x, y),$$

где

$$c_i = -(1+\cos(t_i b))/\sin(t_i b),$$
$$k_i = -(1+\cos(t_i a))/\sin(t_i a), \quad i = 1, 2,$$
$$t_1^2 = 0.5\rho\omega^2(1-\nu^2)(1+q), \quad t_2^2 = \rho\omega^2 S_{11}^E (1+\nu), \tag{11}$$
$$W^* = c_1 k_1 + c_2 k_2,$$
$$u = A_8 F_2(x, y),$$
$$v = A_8 F_1(x, y).$$

Соотношения (10), (11) описывают изгибные колебания элемента в плоскости xy.

Поле перемещений в конечном элементе, изображенном на рис. 2, может быть представлено следующим образом:

$$u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A},$$
$$v = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}, \tag{12}$$

где **U**, **V** – восьмимерные векторы, компонентами которых являются соответствующие сомножители в выражениях (6) - (10). При этом вектор произвольных постоянных $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i=1}^8$ связан с вектором узловых перемещений $\mathbf{d} = \{d_i\}_{i=1}^8$ следующим соотношением:

$$\mathbf{A} = W \cdot \mathbf{d},$$

где ненулевые компоненты матрицы $W = \{W_{ij}\}_{i,j=1}^8$ равны:

$$W_{11} = W_{17} = W_{23} = W_{25} = W_{32} = W_{46} = W_{48} = 0.5;$$
$$W_{51} = W_{53} = W_{62} = W_{68} = W_{73} = W_{77} = W_{84} = W_{88} = -0.25;$$
$$W_{55} = W_{57} = W_{64} = W_{66} = W_{71} = W_{75} = W_{82} = W_{86} = 0.25.$$

Выражения (12) могут быть представлены в форме

$$u = \mathbf{U}W\mathbf{d},$$
$$v = \mathbf{V}W\mathbf{d},$$

а матрица жесткости конечного элемента имеет вид

$$K^e = \int_0^a\int_0^b G^T C G dxdy,$$

где G – матрица (3×8), связывающая вектор деформаций с вектором перемещений: $\vec{\varepsilon} = G\mathbf{d}$;

$$\vec{\sigma} = C\vec{\varepsilon} + \delta_{1i} d_{31}(1+\nu)\mathbf{n}V_0/h;$$

$$C = 1/S_{11}^E/(1-\nu^2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1+\delta_{2i}q & \nu+\delta_{2i}q & 0 \\ \nu+\delta_{2i}q & 1+\delta_{2i}q & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}) = (du_x/dx, du_y/dy, du_x/dy + du_y/dx),$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}),$$

$$n = (1, 1, 0).$$

В соотношениях (13) δ_{ki} – символ Кронекера, при этом в случае электродированных лицевых поверхностей $i = 1$, а в случае отсутствия электродов $i = 2$. Матрица инерции элемента может быть представлена выражением

$$M^e = \int_0^a\int_0^b N^T N dxdy,$$

где матрица $N = WH$,

$$H = \begin{vmatrix} U_1, & U_2, & 0, & 0, & U_5, & 0, & U_7, & U_8 \\ 0, & 0, & V_3, & V_4, & 0, & V_6, & U_8, & U_7 \end{vmatrix}.$$

Дальнейший алгоритм построения решения совпадает с классической схемой МКЭ [4].

На основе изложенного алгоритма были проведены расчеты собственных частот и форм колебаний пьезоэлектрической пластины в случае, когда ее лицевые поверхности полностью электродированы, но допускают пренебрежительно малые разрезы. Пластина выполнена из пьезокерамики ПКР-8.

В табл. 1 приведены значения безразмерных резонансных частот для пластин с различным соотношением сторон. Безразмерная частота Ω связана с частотой f зависимостью

$$\Omega = 2\pi B\sqrt{2S_{11}\rho(1+\nu)}f.$$

На рис. табл. 2 точечным пунктиром изображена исходная конфигурация пьезопластин, сплошной линией – собственные формы колебаний, симметричных относительно осей x и y, при этом прослежена деформация каждого конечного элемента. Собственные формы табл. 2 соответствуют частотам, указанным выше.

Таблица 1. Безразмерных собственных частот

N / A/B	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2.216	2.586	3.105	4.373	5.331	6.515	6.646	8.078	8.213
2	1.275	2.254	2.655	2.883	3.735	4.118	4.419	5.086	5.594

Преимуществом предложенного метода является сравнительно быстрая сходимость результатов при расчете собственных частот в зависимости от разбиения на конечные элементы. В случае квадратной пластины ($A/B = 1$) первые девять собственных частот вычисляются с точностью, не превышающей 1.5% для разбиения 5×5.

Отметим, что первая мода $A/B = 1$ является модой Ламе, для которой аналитическое выражение частоты [5] $\Omega = \pi\sqrt{2/2} = 2.2135$. Проведенные расчеты подтверждают равенство нулю на этой моде суммы главных напряжений всюду на поверхности пластины, динамический коэффициент связи (см. ниже) при этом не превышает 0.001.

Численный анализ напряженно-деформированного состояния пластины показал, что для ряда форм характерно наличие как областей сжатия, так и областей растяжения. Существование таких зон при сплошном электродном покрытии приводит к уменьшению коэффициента электромеханической связи. Для повышения эффективности колебаний на этих модах предлагается [6] разделить сплошные электроды разрезами на области, объединяющие зоны одноименного знака суммы главных напряжений и подвести к ним электрическое напряжение соответствующей полярности.

При этом динамический коэффициент электромеханической связи для исследуемой формы колебаний может быть найден из соотношений

$$K_d^2/(1-K_d^2) = (U_p - U_k)/U_k,$$

$$U_k = 0.5E/(1-\nu^2)\int_S [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y +$$

$$+ 0.5(1-\nu)\varepsilon_{xy}^2]\, dS,$$

$$U_p - U_k = 0.125\,Э_{33}^S K_p^4 S/[d_{31}S_1(1-K_p^2)]^2 \times$$

$$\times \left[\int_{S_1} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\, dS\right]^2,$$

$$K_p^2 = 2d_{31}^2/(1-\nu)\, S_{11}^E Э_{33}^T,$$

где S_1 – область электродного покрытия, с которой снимается электрический сигнал, K_p, K_d – планарный и динамический коэффициенты электромеханической связи, U_p, U_k – внутренняя энергия

Таблица 2. Собственные формы колебаний, симметричных относительно осей координат

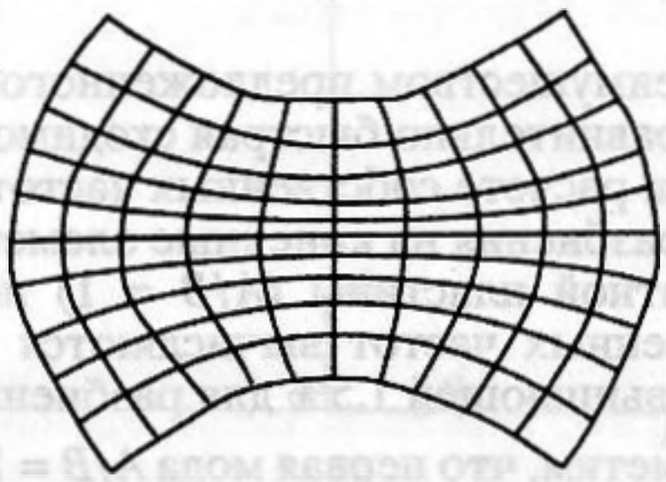
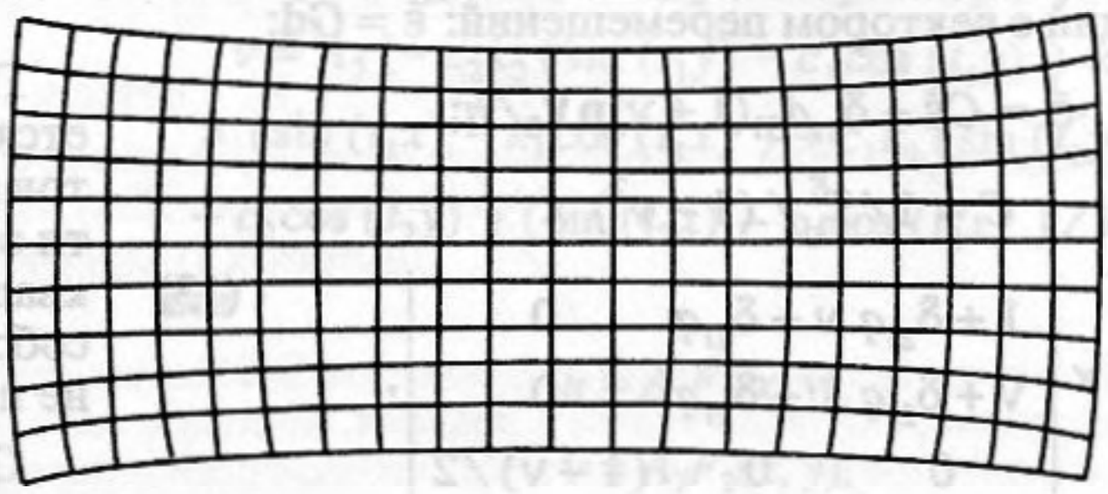
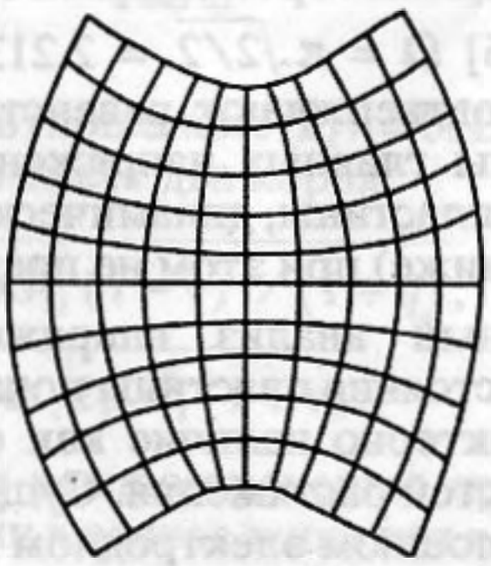
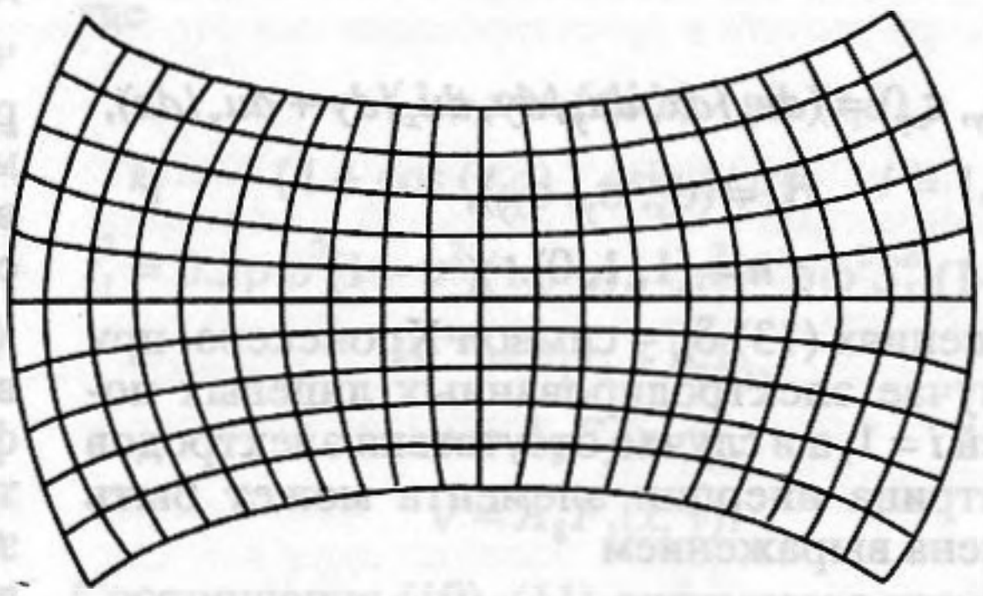
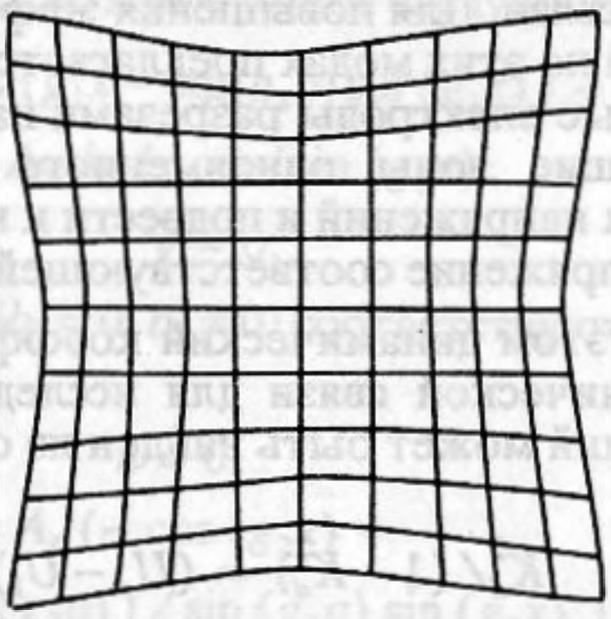
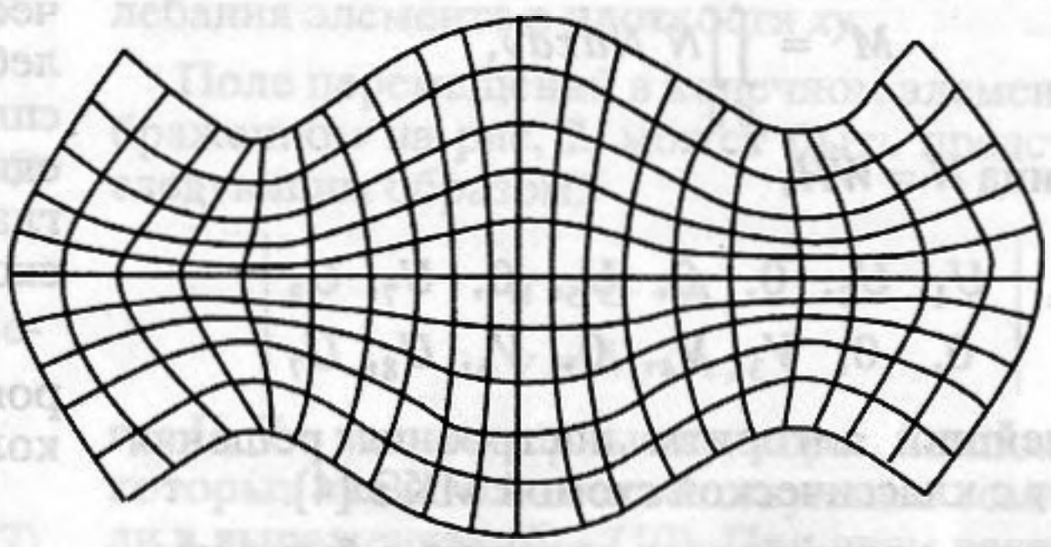
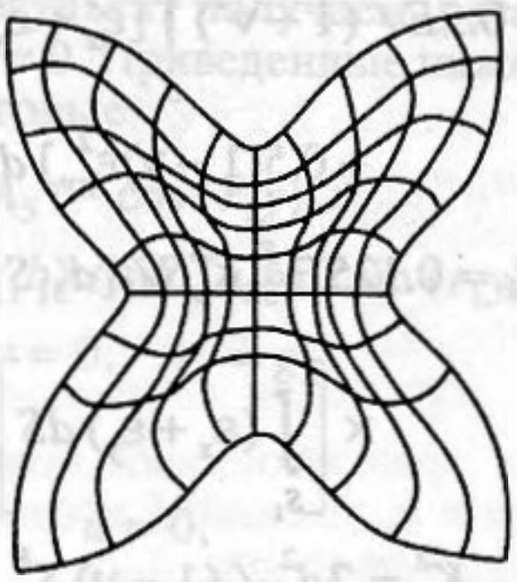
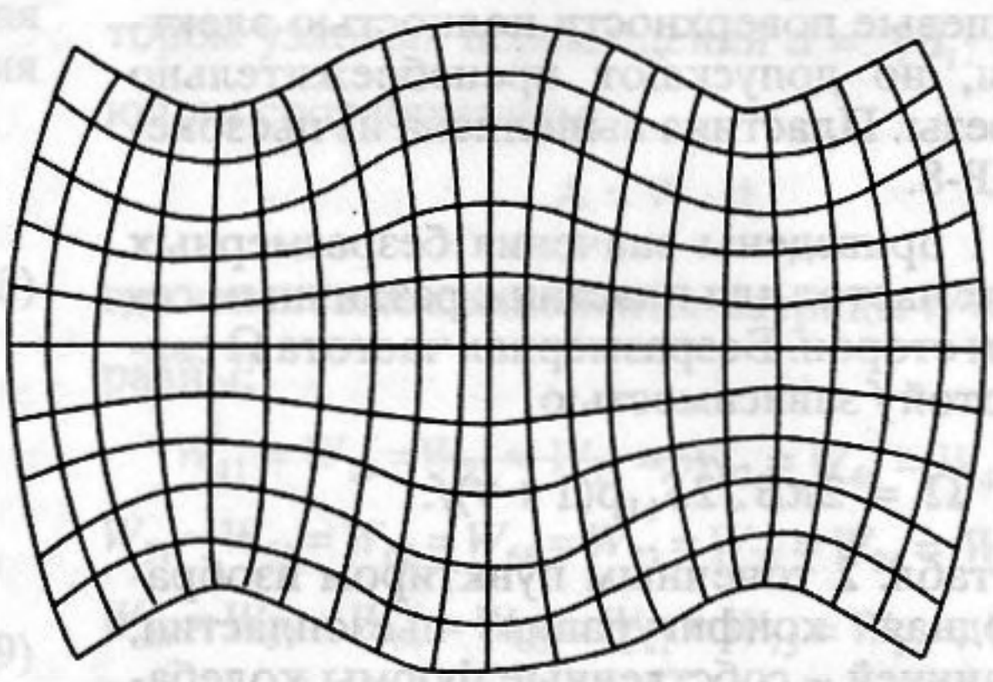
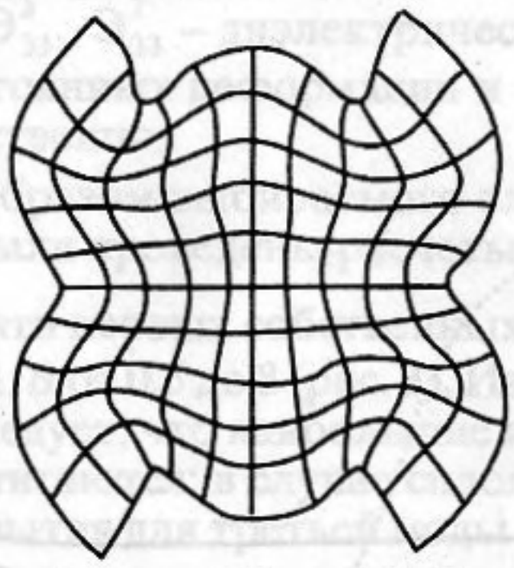
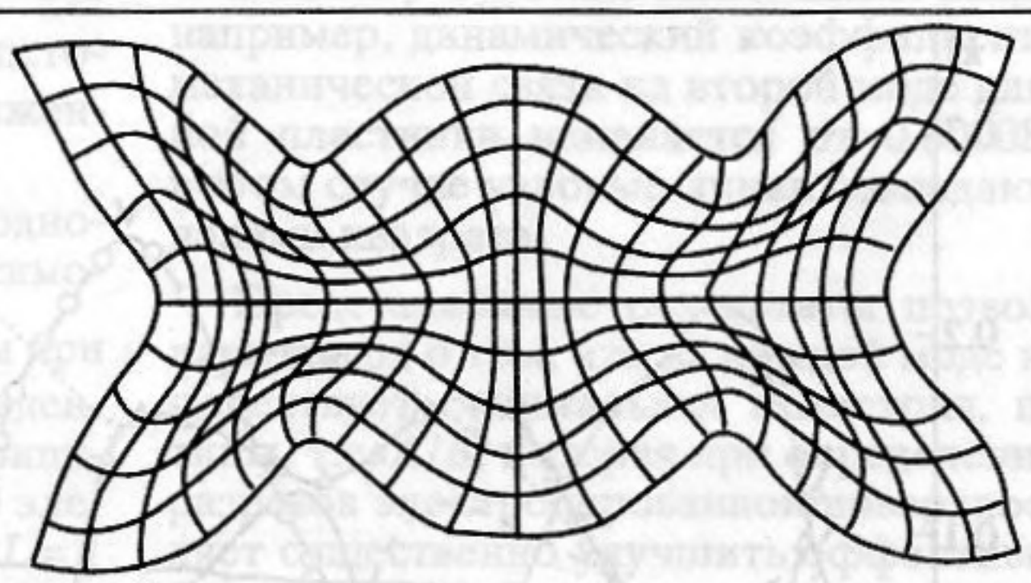
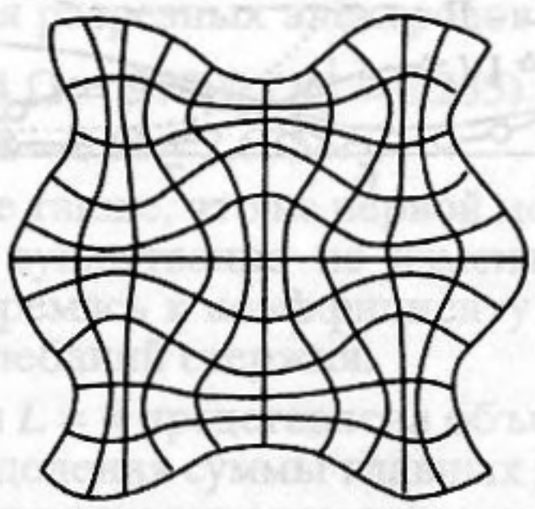
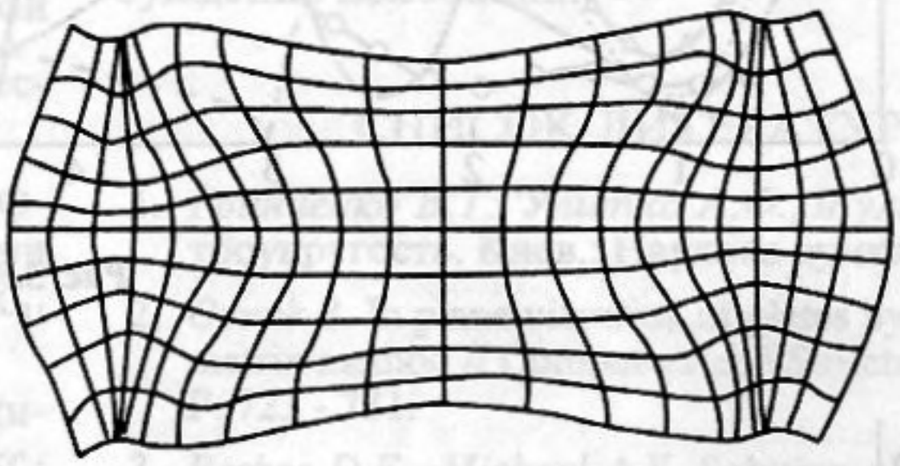
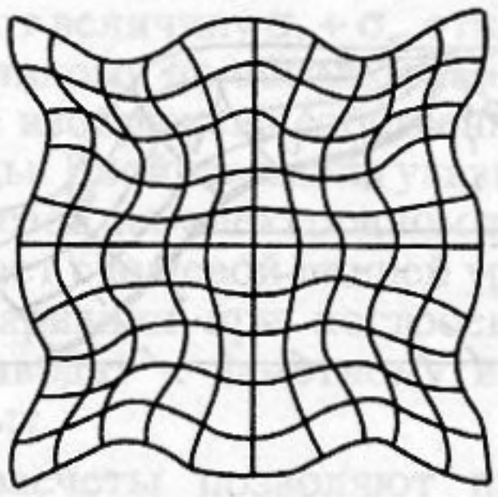
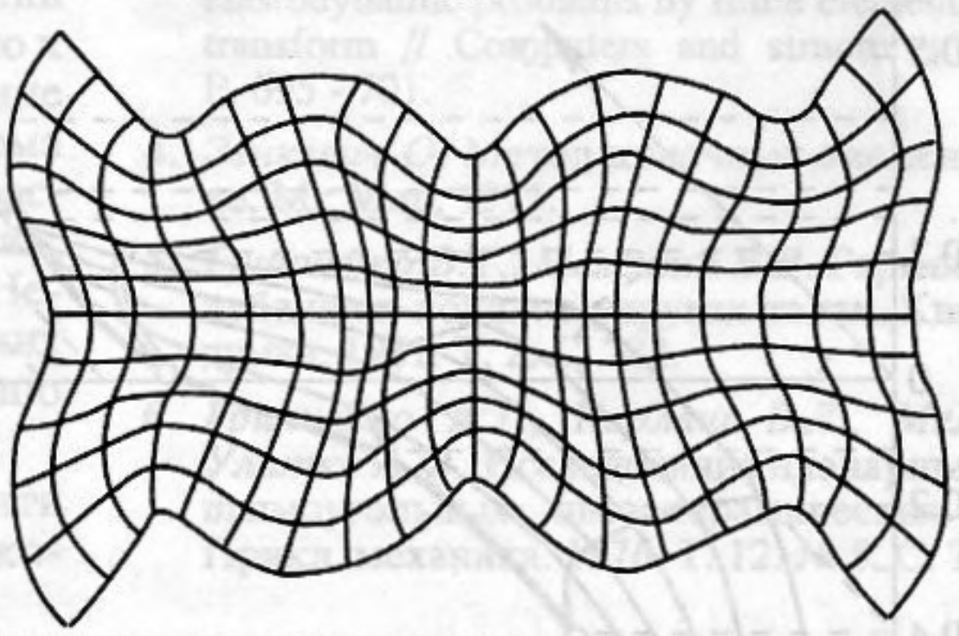
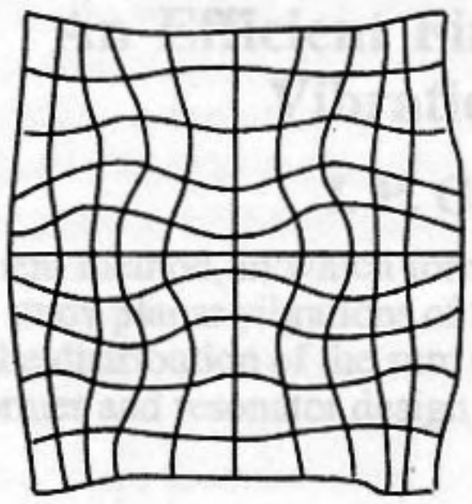
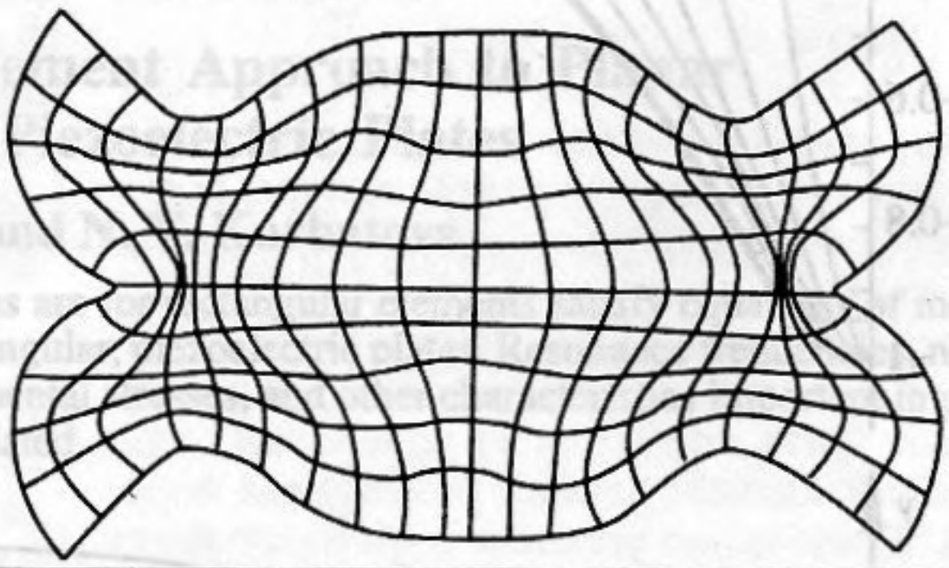
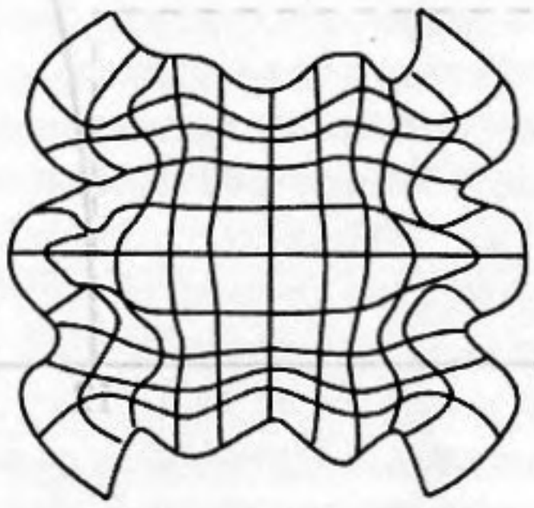
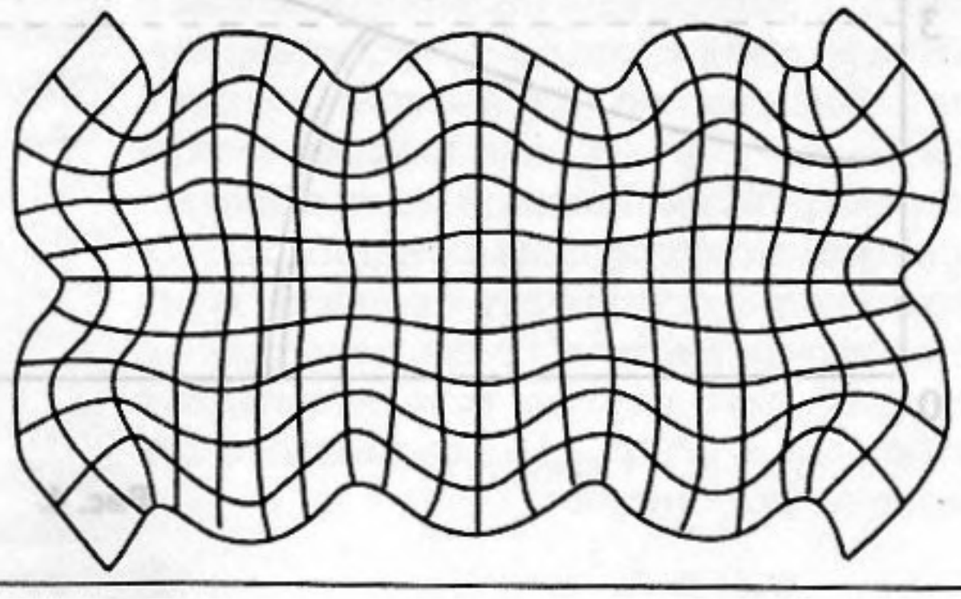
N	$A/B = 1$	$A/B = 2$
I		
II		
III		
IV		

Таблица 2. Окончание

V		
VI		
VII		
VIII		
IX		

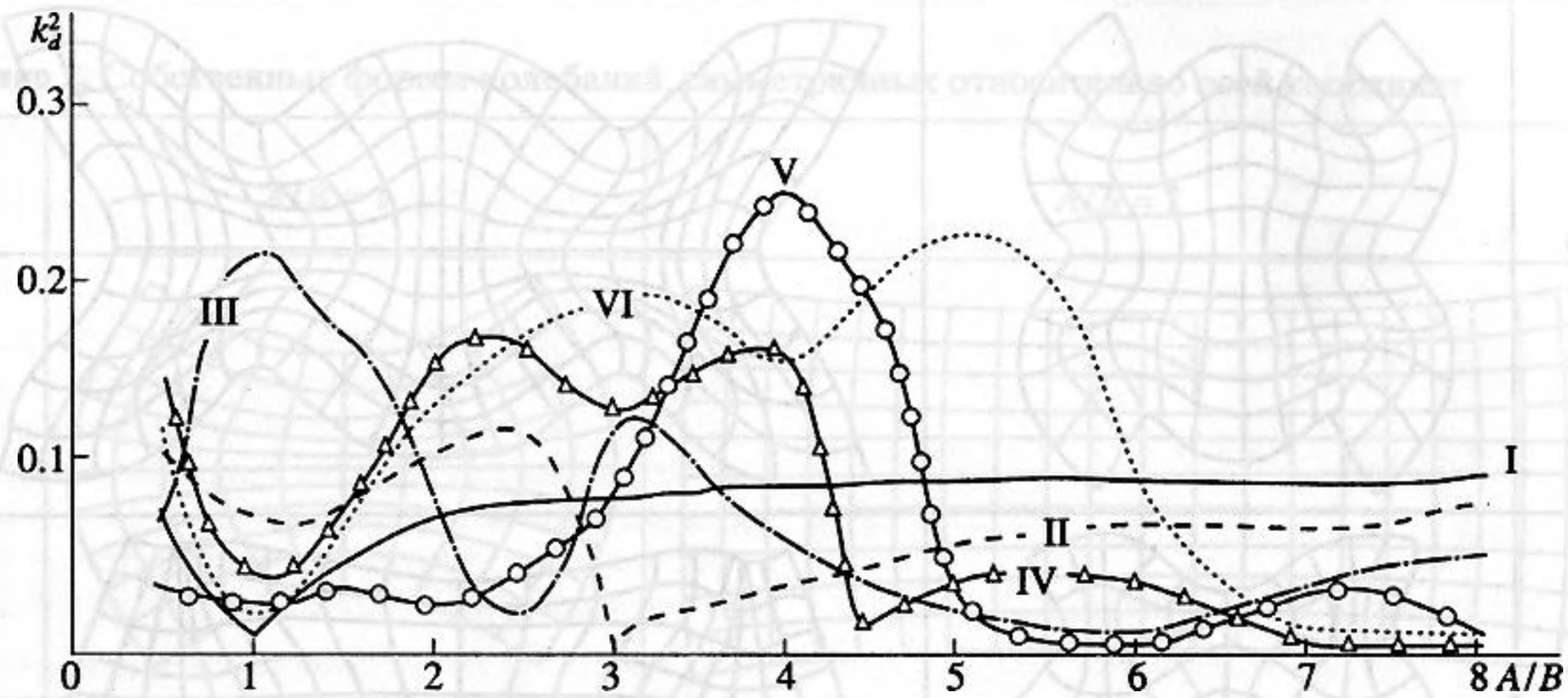

k_d^2
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8 A/B
I
II
III
IV
V
VI

Рис. 3.

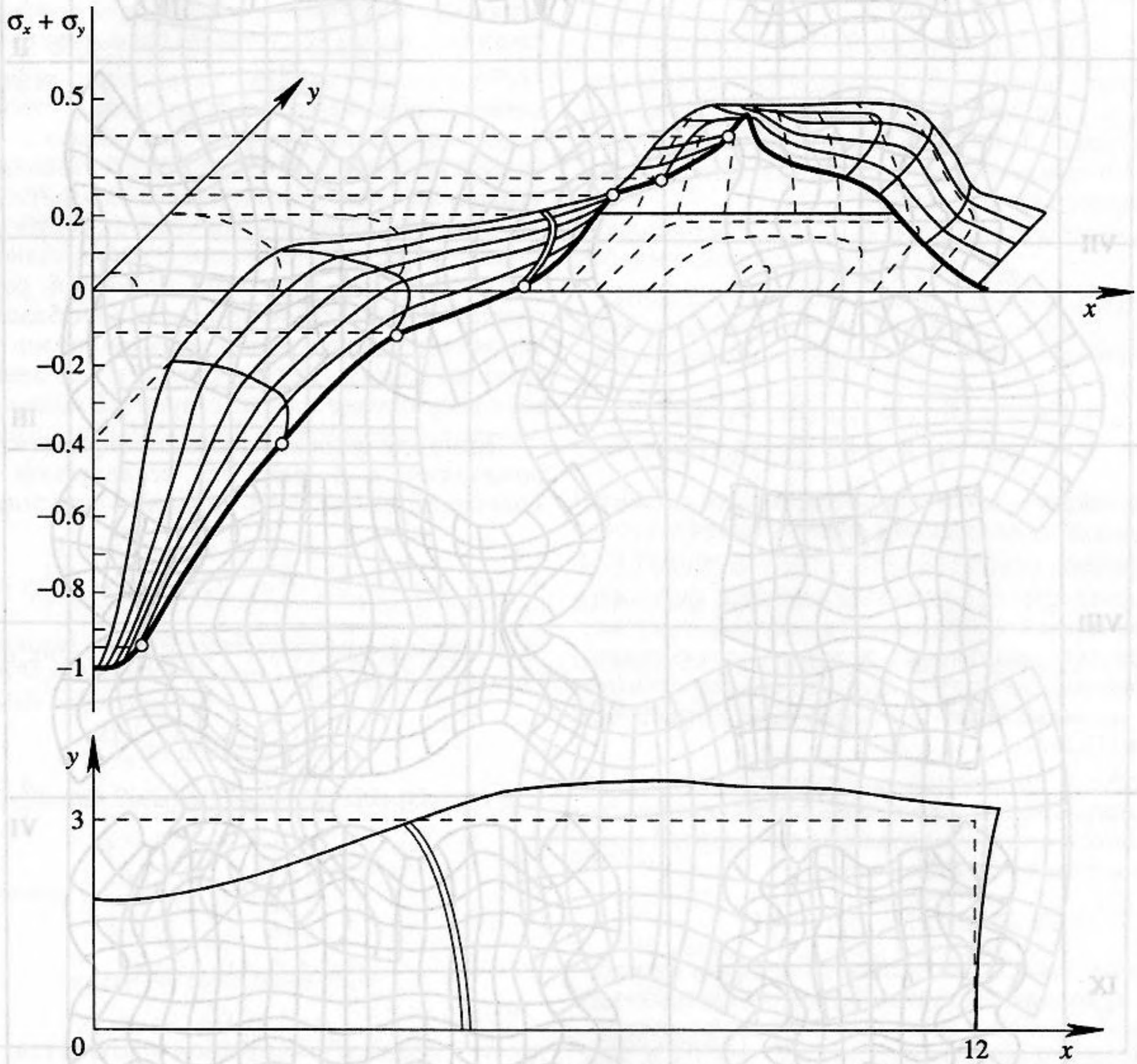

$\sigma_x + \sigma_y$
0.5
0.2
0
–0.2
–0.4
–0.6
–0.8
–1
y
x
y
3
0
12
x

Рис. 4.

пластины с разомкнутыми и короткозамкнутыми электродами, $Э_{33}^{S}$, $Э_{33}^{T}$ – диэлектрические постоянные при постоянных деформации и напряженности, соответственно.

Для таким образом выбираемого электродного покрытия, были проведены расчеты зависимости K_d^2 для девяти первых собственных форм при изменении $L = A/B$ от 0.5 до 8 (рис. 3). Из проведенного анализа следует, что наибольшие коэффициенты связи достигаются: в случае сплошного электродного покрытия для третьей моды – при $L = 1$ ($K_d^2 = 0.216$); для разрезных электродов на пятой моде – при $L = 4$ $\Omega = 2.7002$ ($K_d^2 = 0.255$) и на шестой моде – при $L = 5$ $\Omega = 2.6758$.

Отметим еще также, что на первой моде коэффициент связи существенно не изменяется при $L \in [1.5, 8.0]$, стремясь к коэффициенту связи K_{31} поперечных колебаний стержня.

На рис. 4 для $L = 4$ представлена объемная диаграмма распределения суммы главных напряжений для четверти поверхности пластины. Линии уровня указывают величину $\sigma_x + \sigma_y$, отнесенную к своему максимальному по абсолютной величине значению. Ниже изображена собственная форма исследуемой моды. Двойная линия указывает расположение разрезов на электродном покрытии, который совпадает с нулевой линией уровня. Незначительные вариации при построении таких разрезов не приводят к заметному изменению расчетных данных.

Численные расчеты позволяют проследить улучшение эффективности возбуждения мод колебаний в результате выполнения разрезов. Так, например, динамический коэффициент электромеханической связи на второй моде для квадратной пластинки изменяется от 0.00008 до 0.07; в этом случае узловые линии совпадают с диагоналями квадрата.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что на каждой моде колебаний существует оптимальная геометрия, пьезопластины, т.е. A/B, которая при определенной форме разрезов электродированной поверхности позволяет существенно улучшить эффективность возбуждения колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев.: Наукова думка, 1989. С. 279.
2. *Ovunk B.* In plane vibration of plates by continous mass matrix method // Computers and Structures. 1978. № 8. P. 723 - 731.
3. *Beskos D.E., Michael A.Y.* Solution of plane transient elastodynamic problems by finite elements and Laplace transform // Computers and structures. 1984. № 4. P. 695 - 701.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наукова думка, 1981. Т. 2. С. 288.
6. *Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф.* Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 5. С. 71 - 79.

An Efficient Finite Element Approach to Planar Vibrations of Piezoelectric Plates

I. P. Getman and N. V. Kurbatova

The finite element method, in which form functions are for rectangular elements satisfy equations of motion, is employed to study planar vibrations of thin, rectangular, piezoelectric plates. Resonance frequencies, natural mode shapes, the distribution of the sum of fundamental stresses, and other characteristics important in piezoelectric transformer and resonator design are calculated.