АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 651 - 654

УДК 621.37/39.534

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА СЛАБОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

В. В. Попов

Институт математики АН Республики Кыргызстан
720071 Бишкек, Ленинский просп., 265а

Поступила в редакцию 22.09.93 г.

Рассмотрена дифракция волны Рэлея на границе между свободной и периодически возмущенной частями поверхности в условиях брэгговского резонанса. Предложен приближенный метод решения соответствующей задачи Римана. Он базируется на методе связанных мод и разложении ядра функционального уравнения в ряды Лорана с удержанием главных членов. Решение задачи получено в квадратурах, и вычислены асимптотики рассеянного поля.

В работе [1] рассмотрена задача о дифракции ПАВ Рэлея на слабом скачке граничных условий в случае, когда участки поверхности однородны по обе стороны от линии изменения свойств, и предложен приближенный метод решения соответствующей задачи Римана. В настоящей статье этот метод модифицирован и применен к случаю, когда поверхность периодически неоднородна с одной стороны от линии изменения свойств. Этот случай более интересен для практики, поскольку многие устройства обработки информации на поверхностных волнах – это дифракционные решетки [2, 3]. Короткие дифракционные решетки могут быть теоретически исследованы применением методов теории возмущений [4]; для анализа длинных часто используется модельный подход [5], когда принимаются во внимание только неоднородные плоские волны. Строгий анализ полубесконечных, т.е. "достаточно длинных" решеток приводит к задаче Римана.

Пусть поверхность изотропного твердого тела, занимающего область $y > 0$, свободна при $x < 0$ и периодически нагружена при $x > 0$, то есть на поверхность нанесена инерционная нагрузка с плотностью массы $M_0\theta(x) - M_0\theta(x)\cos px$, $2\pi/p$ – период неоднородности. В приведенном выражении и ниже смысл всех обозначений, если противное не оговорено в тексте, тот же, что и в работе [1]. Входящее в написанную формулу слагаемое $M_0\theta(x)$ отвечает дифракции поверхностной волны при ее переходе со свободной на однородно нагруженную поверхность. Далее будем рассматривать резонансный случай, когда период неоднородности близок к половине длины волны. В этих условиях влияние слагаемого $M_0\theta(x)$ является малым и далее опускается. Исходную ПАВ Рэлея (φ_0, ψ_0) при всех $|x| < \infty$ задаем как в работе [1]. Рассеянное поле (φ, ψ) удовлетворяет следующим граничным условиям при $y = 0$:

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \left(k_t^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi = -2M\theta(x)V(x)\cos px,$$

$$\left(k_t^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 2M\theta(x)W(x)\cos px, \tag{1}$$

$$V(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{k_t^2}{2q_0}A\theta(x)e^{iq_0x},$$

$$W(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{k_t^2}{2q_0}\Omega A\theta(x)e^{iq_0x}.$$

Методом Фурье находим формальное решение уравнений движения

$$(\Delta + k_l^0)\,\varphi = 0, \quad (\Delta + k_t^0)\,\psi = 0,$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

совместно с граничными условиями (1):

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\frac{2q\gamma_q T_q^- - (2q^2 - k_t^2)\,U_q^-}{L_q}e^{iqx + i\beta_q y},$$

$$\psi(x, y) = -\frac{M}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\frac{(2q^2 - k_t^2)\,T_q^- + 2q\beta_q U_q^-}{L_q}e^{iqx + i\gamma_q y}. \tag{2}$$

Формулы (2) есть система интегральных уравнений. В (2) обозначено:

$$T_q^{\pm} = V_{q-p}^{\pm} + V_{q+p}^{\pm}, \quad U_q^{\pm} = W_{q-p}^{\pm} + W_{q+p}^{\pm},$$

$$V_q^{\pm} = \int\limits_0^{\infty} dx V(\mp x)e^{\pm iqx}.$$

Аналогично определены функции $W_q^{\pm}$. Продифференцируем (2) по x и y, положим $y = 0$, выполним преобразование Фурье и скомбинируем полученные четыре уравнения, приходя к задаче Римана со сдвигом:

$$V_q - C_q = \frac{iM}{L_q}\left[\gamma_q k_t^2 T_q^- - \mu_q U_q^-\right],$$

$$W_q - D_q = \frac{iM}{L_q}\left[\mu_q T_q^- + \beta_q k_t^2 U_q^-\right],$$

$$\mu_q = q\,(2q^2 - k_t^2 + 2\beta_q\gamma_q), \quad V_q = V_q^+ + V_q^-, \tag{3}$$

$$W_q = W_q^+ + W_q^-, \quad C_q = \frac{Ak_t^2}{2q_0(q-q_0)},$$

$$D_q = -i\Omega C_q.$$

Используя уравнения (3), преобразуем формулы (2) к виду

$$\begin{bmatrix}\varphi(x,y)\\ \psi(x,y)\end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q^2 + \beta_q\gamma_q}\begin{bmatrix}\varphi_q\exp(i\beta_q y)\\ \psi_q\exp(i\gamma_q y)\end{bmatrix}e^{iqx},$$

$$\varphi_q = q(V_q - C_q) + \gamma_q(W_q - D_q), \tag{4}$$

$$\psi_q = \beta_q(V_q - C_q) - q(W_q - D_q).$$

В дальнейшем считаем, что $p \simeq 2q_0$, т.е. рассматриваем случай главного параметрического резонанса и полагаем, что параметр $|M/q_0|$ мал. Размножая уравнения (3) путем трансляции $q \longrightarrow (q + mp)$, $(m = \pm1, \pm2, \ldots)$, получим бесконечную цепочку уравнений, которую оборвем, удерживая лишь шесть уравнений, отвечающих низшим "гармоникам", как это принято в методе связанных мод [5]. Комбинируя их, приходим к замкнутой системе из четырех функциональных уравнений. Два из них есть

$$T_q - C_{q+p} - C_{q-p} = iM\left[k_t^2 N(\gamma)V_q^- - N(\mu)W_q^-\right],$$

$$U_q - D_{q+p} - D_{q-p} = iM\left[k_t^2 N(\beta)W_q^- + N(\mu)V_q^-\right], \tag{5}$$

а остальные совпадают с (3). В (5) обозначено: $T_q = T_q^+ + T_q^-$, $U_q = U_q^+ + U_q^-$,

$$N(x) = \frac{x_{q+p}}{L_{q+p}} + \frac{x_{q-p}}{L_{q-p}}.$$

Согласно сделанному приближению, в (5) следует принимать во внимание полюсы функций $L_{q\pm p}^{-1}$, расположенные только вблизи $q^2 = q_0^2$. Помимо этого, в силу предполагаемой малости параметра $|M/q_0|$, правые части в (3) и (5) существенны лишь вблизи точек q, где L_q, $L_{q\pm p}$ обращаются в нуль. Учитывая сказанное, упростим систему (3), (5) с помощью замен, связанных с разложением коэффициентов в правых частях (3) и (5) в ряды Лорана:

$$N(\gamma) \longrightarrow -\frac{i\alpha_t}{Q(q, q_0 - p)}, \quad N(\mu) \longrightarrow \frac{qk_t^2(2q_0^2 - k_t^2)}{2q_0^2 Q(q, q_0 - p)},$$

$$N(\beta) \longrightarrow -\frac{i\alpha_l}{Q(q, q_0 - p)}, \quad \frac{\gamma_q}{L_q} \longrightarrow \frac{i\alpha_t}{Q(q, q_0)},$$

$$\frac{\mu_q}{L_q} \longrightarrow \frac{qk_t^2(2q_0^2 - k_t^2)}{2q_0^2 Q(q, q_0)}, \quad \frac{\beta_q}{L_q} \longrightarrow \frac{i\alpha_l}{Q(q, q_0)},$$

$$Q(q, x) = (q^2 - x^2)\,L_1, \quad L_1 = \frac{\partial L_q}{\partial q^2}, \quad L_1 < 0.$$

Последняя производная взята в точке $q^2 = q_0^2$. Кроме того, в соответствии со сказанным, отбросим C_{q-p} и D_{q-p}, имеющие полюсы при $q = p + q_0$. Возникающая после такого упрощения система функциональных уравнений может быть, в принципе, решена способом, изложенным в работе [1]. Однако для выполнения основного этапа решения – факторизации матричного ядра – необходимо решить систему из 64 нелинейных алгебраических уравнений. Существенное упрощение достигается следующим путем. Полагая, что q близко к q_0, произведем разложение $Q(q, q_0 - p) \simeq 2q_0(q + q_0 - p)$, $Q(q, q_0) \simeq 2q_0(q - q_0)$, заменяя также в μ значение q на q_0. В результате получим систему уравнений (Фурье-трансформанты помечаем индексом 1)

$$T_{1q} = (i\varepsilon_2 q_0 W_{1q}^- - \varepsilon_1\alpha_t V_{1q}^-)\,(q + q_0 - p)^{-1},$$

$$U_{1q} = -(\varepsilon_1\alpha_l W_{1q}^- + i\varepsilon_2 q_0 V_{1q}^-)\,(q + q_0 - p)^{-1},$$

$$V_{1q} - C_q = (i\varepsilon_2 q_0 U_{1q}^- + \varepsilon_1\alpha_t T_{1q}^-)\,(q - q_0)^{-1}, \tag{6}$$

$$W_{1q} - D_q = (\varepsilon_1\alpha_l U_{1q}^- - i\varepsilon_2 q_0 T_{1q}^-)\,(q - q_0)^{-1},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{Mk_t^2}{2q_0|L_1|}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1\frac{\Omega\alpha_t}{q_0}.$$

Аналогичную систему можно выписать вблизи $q = -q_0$, помечая входящие в нее Фурье-трансформанты индексом 2: $T_{2q}^{\pm}$, $U_{2q}^{\pm}$, ... Эти две системы аналитически продолжим на все значения q. Найдя их решения, полагаем

$$T_q^{\pm} = T_{1q}^{\pm} + T_{2q}^{\pm}, \quad U_q^{\pm} = U_{1q}^{\pm} + U_{2q}^{\pm}, \ldots \tag{7}$$

Предложенная процедура построения приближенного решения путем редукции (7) может быть строго обоснована для задачи о дифракции сдвиговой поверхностной волны (см. ее постановку в работе [1], формулы (1) - (4), в которых следует заменить $\theta(x)$ на $\theta(x)\cos px$). Доказательство для краткости опускаем.

Из свойств коэффициентов системы (6) вытекает, что $V_{1q}^+ = W_{1q}^+ = 0$. Этот результат позволяет свести ее к системе двух уравнений

$$\begin{bmatrix} T_{1q}^+ \\ U_{1q}^+ \end{bmatrix} + \mathcal{F} \begin{bmatrix} T_{1q}^- \\ U_{1q}^- \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_1(\alpha_l - \alpha_t) A k_t^2}{2q_0(X^2 - X_0^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ i\Omega \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{X^2 - X_0^2} \begin{bmatrix} X^2 - X_0^2 - \delta_t & i\lambda \\ -i\lambda & X^2 - X_0^2 + \delta_l \end{bmatrix},$$

$$\delta_{l,t} = \varepsilon_1^2(\alpha_l - \alpha_t)\alpha_{l,t}, \quad \lambda = \delta_t \Omega,$$

$$X = q - \frac{p}{2}, \quad X_0 = q_0 - \frac{p}{2}.$$

Произведем факторизацию $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \cdot \mathcal{F}^-$ [1]. После весьма громоздких вычислений найдем

$$\mathcal{F}^\pm = \frac{1}{X \pm X_0} \begin{bmatrix} X \pm A_+ & \pm iA_1 \\ \pm iA_1 & X \pm A_- \end{bmatrix},$$

$$A_\pm = \frac{1}{2}\left(X_0 + X_1 \pm \frac{\delta_l + \delta_t}{X_0 + X_1}\right), \quad A_1 = \frac{\lambda}{X_0 + X_1},$$

$X_1 = (X_0^2 + \delta_t - \delta_l)^{1/2}$, получая, в частности, закон дисперсии волны Рэлея на периодически нагруженной поверхности

$$q_\pm = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q_0 - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon_1^2(\alpha_l - \alpha_t)^2}{4}}.$$

Дальнейший ход решения описан в работе [1]. Опуская его, а также решение системы, содержащей $T_{2q}^\pm$, $W_{2q}^\pm$, ..., приведем окончательный результат:

$$\frac{2q_0}{Ak_t^2}\begin{bmatrix} \varphi_q \\ \psi_q \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{q - q_+} - \frac{1}{q - q_0}\right)\begin{bmatrix} q - i\Omega\gamma_q \\ \beta_q + i\Omega q \end{bmatrix} + \\ + \chi\left(\frac{1}{q + p - q_+} - \frac{1}{q + q_0}\right)\begin{bmatrix} q + i\Omega\gamma_q \\ \beta_q - i\Omega q \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$\chi = \varepsilon_1(\alpha_l - \alpha_t)/2(q_0 - q_-)$. Подстановка (8) в (4) решает в квадратурах задачу о дифракции волны Рэлея при ее переходе со свободной на периодически нагруженную поверхность. Поясним смысл слагаемых, входящих в (8). Вычет в полюсе $q = q_0$ есть поле, компенсирующее исходную волну под нагруженной поверхностью ($x > 0$), где она не может распространяться. Вычет в полюсе $q = -q_0$ есть отраженная волна при $x < 0$. Наконец, вычеты в полюсах $q = q_+$ и $q = q_+ - p$ дают парциальные составляющие блоховского представления волны Рэлея при $x > 0$.

Приведем асимптотики интегралов (4), полагая $x = R\sin\alpha$, $y = R\cos\alpha$, $k_tR \gg 1$:

$$\varphi(x, y) = \varphi_{\text{п}}(x, y) + \varphi_{\text{об}}(x, y),$$

$$\psi(x, y) = \psi_{\text{п}}(x, y) + \psi_{\text{об}}(x, y),$$

где поле поверхностных волн $\varphi_{\text{п}}$, $\psi_{\text{п}}$ есть

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\text{п}} \\ \psi_{\text{п}} \end{bmatrix} = \theta(x)\begin{bmatrix} (1 - \chi\exp(-ipx))\exp(-\alpha_l y) \\ i\Omega(1 + \chi\exp(-ipx))\exp(-\alpha_t y) \end{bmatrix} \times \\ \times Ae^{iq_+x} - \theta(-x)\begin{bmatrix} \exp(-\alpha_l y) \\ -i\Omega\exp(-\alpha_t y) \end{bmatrix} A\chi e^{-iq_0x} - \\ - \theta(x)\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

На границе области брэгговского резонанса, когда $q_\pm = p/2$, имеем $|\chi| = 1$, и тогда поверхностная волна $\varphi_0 + \varphi_{\text{п}}$, $\psi_0 + \psi_{\text{п}}$ является стоячей. Ее амплитуда равна $2|A|$. Объемное поле $\varphi_{\text{об}}$, $\psi_{\text{об}}$ описывается выражениями

$$\varphi_{\text{об}} \simeq \frac{(2\pi k_l R)^{-1/2}\tilde{\varphi}\cos\alpha}{k_l\sin^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{k_t^2 - k_l^2\sin^2\alpha}} e^{i(k_lR - \pi/4)},$$

$$\psi_{\text{об}} \simeq -\frac{(2\pi k_t R)^{-1/2}\tilde{\psi}\cos\alpha}{k_t\sin^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{k_l^2 - k_t^2\sin^2\alpha}} e^{i(k_tR - \pi/4)}, \tag{10}$$

где $\tilde{\varphi}$ – значение φ_q в точке $q = k_l\sin\alpha$, $\tilde{\psi}$ – значение ψ_q в точке $q = k_t\sin\alpha$. Из формул (8) видно, что φ и ψ малы по параметру ε_1, то есть малой является и доля энергии, рассеиваемая в объем.

Взаимодействие волны с поверхностными неоднородностями в условиях резонанса не мало, поскольку амплитуда отраженной поверхностной волны близка к амплитуде набегающей. Вместе с тем объемное излучение, генерируемое на скачке граничных условий, оказывается подавленным вследствие интерференции волн, рассеиваемых каждой неоднородностью рассматриваемой решетки. Отметим также малую по значениям функции $\cos\alpha$ (см. (10)) величину амплитуды объемного поля у поверхности то есть энергия, рассеивается в основном в глубь твердого тела. Отметим особенность, отличающую дифракцию волны Рэлея на слабом разрыве граничных условий от аналогичной дифракции квазиобъемных ПАВ типа Лява или Гуляева–Блюстейна. В случае волны Рэлея расстояние, на котором происходит трансформация ПАВ при переходе через скачок граничных условий, составляет всего $\Delta x \sim 1$ - 2 длины волны. Поэтому развитая здесь теория пригодна для решеток, содержащих даже 2 - 4 "волны" синусоиды. В то же время для квазиобъемных волн длина трансформации составляет $\Delta x \sim k_t(\Delta y)^2$, где Δy – глубина проникновения ПАВ в объем, $k_t\Delta y \gg 1$ [6]. Следовательно, только если число "волн" синусоидальной решетки превосходит $(\Delta y)^2 k_t^2/\pi$, она может считаться полубесконечной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов В.В.* Дифракция волны Рэлея на слабом скачке граничных условий // Акуст. журн. (в печати).
2. Поверхностные акустические волны. Сб. под ред. Олинера А. М.: Мир, 1981. С. 390.
3. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. С. 415.
4. *Бирюков С.В.* Рассеяние рэлеевских волн двумерными неровностями поверхности при наклонном падении // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 4. С. 494 - 501.
5. *Гуляев Ю.В., Григорьевский В.И., Плесский В.П.* Брэгговское отражение волны Рэлея от периодически неровного участка поверхности упругого тела // ЖТФ. 1981. Т. 51. № 7. С. 1338 - 1344.
6. *Попов В.В.* Резонансная дифракция поверхностной акустической волны на границе между однородным и периодически возмущенным участками поверхности // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 143 - 148.

Rayleigh Wave Diffraction by a Weak Inhomogeneity

V. V. Popov

Rayleigh wave diffraction by an interface between free and periodically perturbed surface areas under conditions of Bragg resonance is discussed. An approximate method for solving an appropriate Riemann problem is proposed. It is based on the coupled modes method and on an expansion of the kernel of a functional equation into a Laurent series in which leading terms are retained. A solution to the problem is derived in integral form, and asymptotics of the scattered field are calculated.