

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНТАКТА ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ВОЗМОЖНОСТИ АКУСТОДИАГНОСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕРОВНОСТЕЙ

© 1994 г. О. В. Руденко, Чинь Ань Ву

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119899 Москва, Ленинские горы, МГУ

Поступила в редакцию 25.11.93 г.

Проведен анализ измерений коэффициентов отражения волн 1-й и 2-й гармоник от контакта двух шероховатых поверхностей в зависимости от прижимающего давления. Предложена модель, в которой микровыступам ставится в соответствие ансамбль одинаковых пружинок различной длины. Такой контакт есть бесконечно тонкий слой, линейные и нелинейные модули которого выражаются через вероятностное распределение пружинок по длинам. Решена задача о нелинейном отражении волны от слоя. По данным измерений восстановлена функция распределения. Предложен способ оценки класса чистоты шероховатых поверхностей.

В ряде экспериментальных работ [1, 2] наблюдались нелинейные явления при отражении упругих волн от границы контакта двух твердых тел. Было показано, что нелинейность шероховатых границ намного превосходит объемную нелинейность, связанную с ангармонизмом сил межмолекулярного взаимодействия. Контактная акустическая нелинейность (КАН) перспективна для использования в устройствах акустоэлектроники на поверхностных акустических волнах [3]. В недавней работе авторов [4] показано, что эффекты КАН позволяют оценить класс чистоты контактирующих поверхностей.

Для построения теории КАН обратимся к экспериментальным данным. В работе [2] проведен следующий эксперимент. К поверхности полированной стеклянной подложки прижимались образцы стекла с различным качеством поверхности. Ультразвуковой пучок распространялся в подложке, падал под углом 45° на плоскость контакта подложка-образец и после отражения регистрировался приемником. Зависимость коэффициента отражения $|K|$ для амплитуды 1-й гармоники от приложенного давления изображена на рис. 1, кривая 1. Видно, что при малых прижимающих давлениях p контакта фактически нет, поверхность подложки свободна и $|K| = 1$. С ростом p поверхности подложки и образца сближаются, улучшая акустическое качество контакта. При этом все большая часть энергии волны проходит в образец, а коэффициент отражения $|K|$ уменьшается. В области падения $|K|$ наблюдается максимум амплитуды отраженной 2-й гармоники (кривая 2), сам факт появления которой обусловлен КАН.

На основе этих экспериментов нами предложена [4] простая модель контакта, изображенная на рис. 2. Микровыступам шероховатой поверхности ставится в соответствие ансамбль одинаковых пружинок с разными длинами l_i . Каждая из пружинок деформируется под действием силы F_i по закону Гука, когда ее длина больше толщины контакта h :

$$F_i = k(l_i - h)\Theta(l_i - h). \quad (1)$$

Здесь k – жесткость, Θ – единичная функция Хевисайда. Переходя к давлению $p = F_i/\Delta S_i$ (где ΔS_i – площадь контакта, приходящаяся в среднем на одну пружину) и суммируя по всем i , получим

$$p = E \left\langle \frac{l_i - h}{l_i} \Theta(l_i - h) \right\rangle = E \int_h^{l_0} \frac{l - h}{l} w(l) dl. \quad (2)$$

Угловые скобки в формуле (2) означают статистическое усреднение, w – вероятностное распределение пружинок по их длинам, E – модуль Юнга материала, l_0 – максимальная длина пружинок (высоты микровыступов).

Пусть в отсутствие волны равновесная толщина контакта $h = h_0$ при статическом давлении $p = p_0$. При включении источника ультразвука под действием переменного давления p' происходят небольшие изменения толщины контакта. Полагая в (2)

$$p = p_0 + p', \quad h = h_0(p_0) - \xi, \quad (3)$$

с точностью до величин второго порядка малости по возмущениям p' , ξ получим связь между ними:

$$p' \approx \left[E \int_{h_0}^{l_0} w(l) \frac{dl}{l} \right] \xi + \left[E \frac{w(h_0)}{h_0} \right] \frac{\xi^2}{2} = \kappa \xi + \beta \frac{\xi^2}{2}. \quad (4)$$

Заметим, что связь $p'(\xi)$ (4) является нелинейной, хотя рассматривался ансамбль линейных пружин.

Выражение для коэффициента β при нелинейном члене в формуле (4) должно, вообще говоря, содержать добавку, связанную с негуковским характером деформирования пружин, т.е. с наличием дополнительного квадратично-нелинейного слагаемого (пропорционального $(l_i - h)^2$) в законе (1). Эта нелинейность имеет ту же природу, что и нелинейность контактов Герца [5] и обусловлена увеличением фактической площади контакта каждого из "зубцов" шероховатой поверхности с ростом прижимающего давления. Однако при акустических смещениях, малых по сравнению с высотой микровыступов, герцевская нелинейность, по-видимому, менее существенна, чем ужесточение контакта за счет увеличения числа контактирующих элементов шероховатости [6].

Перейдем теперь к расчету коэффициентов отражения от контакта, считая его бесконечно тонким нелинейно-упругим слоем. Постановка задачи иллюстрируется рис. 3. Пусть на контакт, совпадающий с осью y , под углом θ_1 , из среды 1 падает плоская волна произвольного спектрального состава. Она частично отражается от контакта и частично проходит в среду 2 под углом θ_2 к нормали. Поля давлений в этих средах

$$p'_1 = p_I \left(t - \frac{x}{c_1} \cos \theta_1 - \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 \right) + p_R \left(t + \frac{x}{c_1} \cos \theta_1 - \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 \right), \quad (5)$$

$$p'_2 = p_T \left(t - \frac{x}{c_2} \cos \theta_2 - \frac{y}{c_2} \sin \theta_2 \right). \quad (6)$$

В формулах (5), (6) индексы I, R, T обозначают исходную падающую, отраженную и прошедшую волны. Соответствующие x -компоненты колебательной скорости равны

$$u_{1x} = \frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} (p_I - p_R), \quad u_{2x} = \frac{\cos \theta_2}{\rho_2 c_2} p_T. \quad (7)$$

Необходимо использовать граничные условия: равенство давлений по обе стороны от контакта

$$p'_1 = p'_2 = p' \quad (8)$$

и нелинейную связь (4) давления с изменением толщины контакта:

$$p' = \kappa (\xi_1 - \xi_2) + \frac{\beta}{2} (\xi_1 - \xi_2)^2. \quad (9)$$

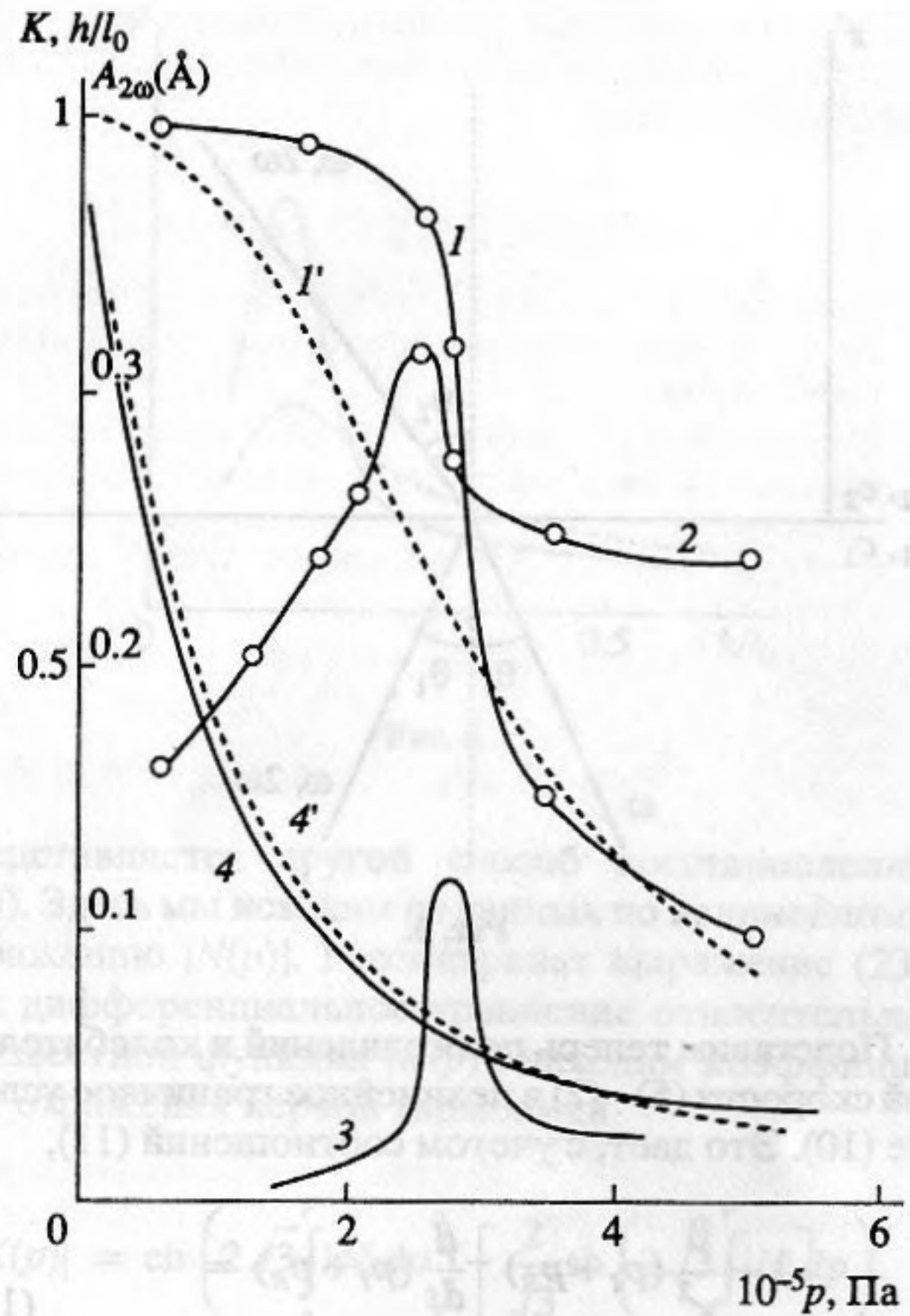


Рис. 1.

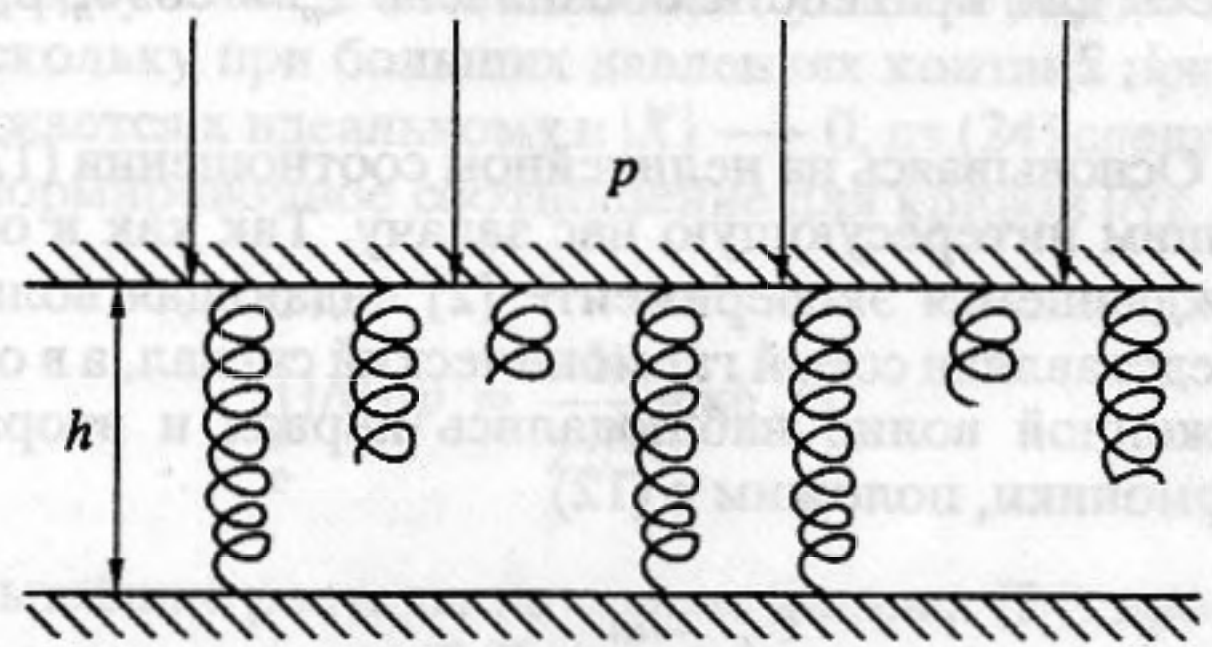


Рис. 2.

В формуле (9) ξ_1 — это смещение нижней контактирующей границы вдоль оси x , ξ_2 — смещение верхней контактирующей границы (рис. 3). Дифференцируя (9) по времени, с учетом малости нелинейного члена получим

$$\left(1 - \frac{\beta}{\kappa^2} p' \right) \frac{dp'}{dt} = \kappa (u_{1x} - u_{2x}). \quad (10)$$

Подставляя поля давлений (5), (6) в граничное условие (8), приходим к очевидным соотношениям

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}, \quad p_I(t) + p_R(t) = p_T(t). \quad (11)$$

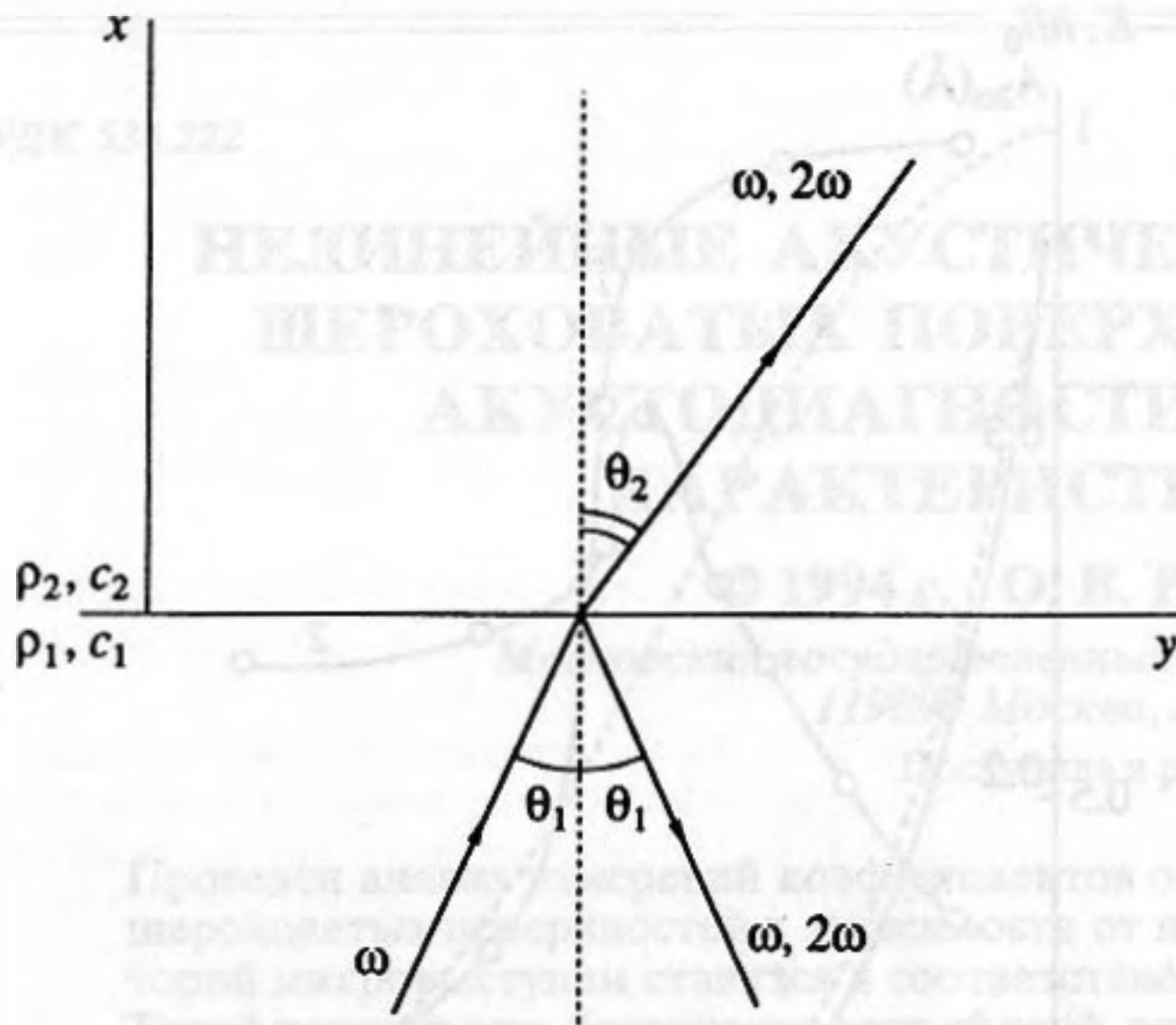


Рис. 3.

Подставим теперь поля давлений и колебательной скорости (5) - (7) в нелинейное граничное условие (10). Это дает, с учетом соотношений (11),

$$\left[1 - \frac{\beta}{\kappa^2} (p_I + p_R) \right] \frac{d}{dt} (p_I + p_R) = \kappa [(z_1 - z_2) p_I - (z_1 + z_2) p_R]. \quad (12)$$

Здесь для краткости обозначено $z_n = \cos \theta_n / \rho_n c_n$ ($n = 1, 2$).

Основываясь на нелинейном соотношении (12), решим интересующую нас задачу. Так как в обсуждавшемся эксперименте [2] падающая волна представляла собой гармонический сигнал, а в отраженной волне наблюдались первая и вторая гармоники, положим в (12)

$$p_I = \frac{1}{2} A_1 e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (13)$$

$$p_R = \frac{1}{2} A_\omega e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} A_{2\omega} e^{-i2\omega t} + \text{к. с.},$$

где буквами к.с. обозначены члены, комплексно сопряженные по отношению к выписанным выражениям. Поскольку нелинейность предполагается слабой, решаем задачу методом последовательных приближений. В первом приближении находим известное выражение (см., например [7]) для коэффициента отражения 1-й гармоники:

$$K = \frac{A_\omega}{A_1} = \frac{z_1 - z_2 + i \frac{\omega}{\kappa}}{z_1 + z_2 - i \frac{\omega}{\kappa}}. \quad (14)$$

Во втором приближении находим соответствующее выражение для 2-й гармоники:

$$N = \frac{A_{2\omega}}{A_1^2} = \frac{\beta}{2\kappa^2} \times \frac{(1+K) [(z_1 - z_2) - (z_1 + z_2) K]}{z_1 + z_2 - i 2 \frac{\omega}{\kappa}}. \quad (15)$$

В частном случае, когда среды 1 и 2 одинаковы,

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{1+4\gamma^2}}, \quad |N| = \frac{\beta}{\kappa^2} \frac{\gamma^2}{(1+4\gamma^2)\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{\kappa \cos \theta}{\omega \rho c}.$$

Развитая теория позволяет как объяснить результаты наблюдений (рис. 1), так и решить важную для приложений задачу - восстановить статистическую функцию распределения высот микровыступов шероховатой поверхности по данным эксперимента.

В дальнейшем нам потребуются соотношения, получаемые дифференцированием интегралов в формулах (2), (4) по параметру h :

$$\frac{dp}{dh} = -\kappa, \quad \frac{d\kappa}{dh} = -E \frac{w(h)}{h} = -\beta. \quad (17)$$

Здесь и далее для простоты будем писать $h_0 = h$, $p_0 = p$. Из формул (17) находим выражение для функции распределения

$$w(h) = \frac{1}{E} h \frac{d^2 p(h)}{dh^2}. \quad (18)$$

Чтобы рассчитать w по формуле (18), необходимо знать $p(h)$ или $h(p)$ - зависимость толщины контакта от приложенного статического давления. Эта зависимость может быть найдена из дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dh} = -\kappa = -\frac{\omega \rho c \sqrt{1 - |K(p)|^2}}{\sqrt{2} |K(p)|}, \quad (19)$$

получаемого из формул (17), (16). Здесь $|K(p)|$ - зависимость коэффициента отражения первой гармоники от приложенного давления, измеряемая в эксперименте (рис. 1). Интегрируя (19), имеем

$$\frac{h(p)}{l_0} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\omega \rho c l_0} \int_0^p \frac{|K| dp}{\sqrt{1 - |K|^2}}. \quad (20)$$

С другой стороны, дифференцируя (19) по h и подставляя в (18), получим простое выражение для функции распределения:

$$w(h) = -\frac{1}{2E} (\omega \rho c)^2 h |K(p)|' |K(p)|^{-3}. \quad (21)$$

Формулы (20) и (21) дают искомое решение задачи восстановления $w(h)$ по измеренной зависимости $|K(p)|$.

Однако, прежде чем переходить к анализу функции распределения, укажем на очевидное следствие полученных формул. Сравнивая (17), (21), найдем связь между нелинейным модулем и линейным коэффициентом отражения:

$$\beta(p) = -\frac{1}{2} (\omega pc)^2 |K(p)|' |K(p)|^{-3}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (16), получим

$$|N(p)| = -\frac{1}{2} |K(p)|' (1 + 3|K(p)|^2)^{-1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, коэффициенты отражения первой и генерации второй гармоники (16) связаны между собой простым соотношением (23).

Пользуясь экспериментальными данными по коэффициенту отражения первой гармоники (кривая 1 на рис. 1) и формулой (23), нетрудно построить зависимость $|N(p)|$ для второй гармоники. Эта зависимость, показанная кривой 3 на рис. 1, обнаруживает качественное согласие с экспериментальной кривой 2.

Перейдем теперь к восстановлению функции распределения высот микровыступов шероховатой поверхности. Эта задача может быть решена двумя способами. Первый способ основывается на непосредственных измерениях $|K(p)|$. Оцифровав кривую 1 (рис. 1) и пользуясь формулой (20), можно рассчитать безразмерную ширину контакта h/l_0 как функцию приложенного давления p ; результат расчета показан кривой 4 на рис. 1. Тем самым мы определили и обратную зависимость $p(h/l_0)$, которая при подстановке в выражение (21) дает искомую функцию распределения $w(h)$ – рис. 4.

Однако этот способ имеет существенный недостаток. Дело в том, что в экспериментах с протяженными контактами две поверхности соприкасаются не по всей своей площади, как считалось при построении нашей теории. Из-за волнистости, масштаб которой гораздо больше масштаба шероховатости, контактирование происходит лишь в отдельных зонах, расположенных на поверхности в виде пятен [6]. Их суммарная площадь значительно меньше номинальной площади касания. Вследствие этого статическое давление в контактных зонах заметно больше, чем среднее давление на весь контакт (которое отложено на рис. 1 по оси абсцисс). Кроме того, измеренные значения $|K(p)|$ явно завышены, поскольку вне контактных зон происходит фактически полное отражение волны как от идеальной свободной границы.

Поскольку вторая гармоника возбуждается только в пределах контактных зон, более точным

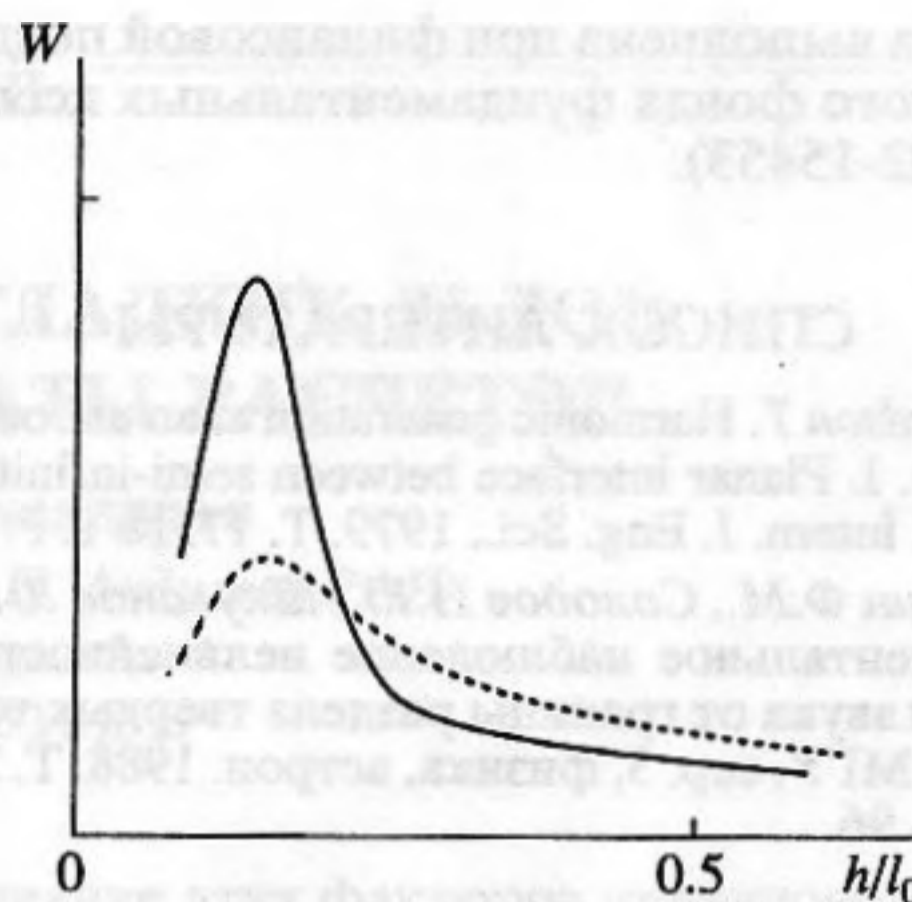


Рис. 4.

представляется другой способ восстановления $w(h)$. Здесь мы исходим из данных по нелинейному отражению $|N(p)|$. Рассматривая выражение (23) как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $|K(p)|$, находим коэффициент отражения первой гармоники

$$|K(p)| = \text{ch} \left(2\sqrt{3} \int_0^p |N| dp \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sh} \left(2\sqrt{3} \int_0^p |N| dp \right). \quad (24)$$

При получении (23) использовано условие $|K(0)| = 1$. Поскольку при больших давлениях контакт приближается к идеальному и $|K| \rightarrow 0$, из (24) следует нормировочное соотношение для кривой $|N|$:

$$\int_0^\infty |N| dp = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{arsh} \sqrt{3}.$$

Дальнейшие расчеты на основе данных (24) производятся, как и в первом случае, по формулам (20), (21). Результаты изображены на рис. 1 (штриховая кривая 4' для $h(p)/l_0$ и рис. 4 (штриховая кривая для $w(h)$).

В заключение укажем, что развитая теория на основе имеющихся экспериментальных данных [2] позволяет оценить характерные размеры шероховатостей l_0 и восстановить функцию распределения $w(h)$ лишь с точностью до порядка величины [4]. Для использования этого метода в приложениях как независимого метода контроля качества поверхности необходимо проводить специальные измерения, используя небольшие участки контактирующих тел, лишенные крупномасштабных неровностей. В настоящее время такие измерения проводятся на кафедре акустики МГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-02-15453).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Richardson T. Harmonic generation at an unbounded interface. I. Planar interface between semi-infinite elastic media. Intern. J. Eng. Sci., 1979. Т. 17. № 1. P. 73 - 85.
2. Северин Ф.М., Солодов И.Ю., Шкуланов Ю.Н. Экспериментальное наблюдение нелинейности отражения звука от границы раздела твердых тел // Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрон. 1988. Т. 29. № 4. С. 94 - 96.
3. Solodov I.Yu., Asainov A.F., Ko Sel Len. Non-linear SAW reflection: experimental evidence and NDE applications. Ultrasonics, 1993. Т. 31. № 2. P. 91 - 96.
4. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. Распределение микровыступов шероховатой поверхности по данным акустических измерений // Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрономия (в печати).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
6. Справочник по триботехнике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1989.
7. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.

Nonlinear Acoustic Properties of a Rough Surface Contact and Acoustodiagnosics of a Roughness Height Distribution

O. V. Rudenko and Chin An Vu

Reflection factor measurements for first and second harmonics are analyzed as functions of pressure applied to the contact between two rough surfaces. Microasperities of these surfaces are modeled by a set of identical springs of various lengths. Such a contact is an infinitesimally thin layer whose linear and nonlinear moduli are given by a probabilistic distribution of spring lengths. The problem of nonlinear wave reflection from a layer is solved. A distribution function is determined using experimental data. A technique for roughness height evaluation is proposed.