

КРАТКИЕ
СООБЩЕНИЯ

УДК 551.463

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ
МЕЖДУ НОРМАЛЬНЫМИ ВОЛНАМИ В ВОЛНОВОДЕ
СО СЛУЧАЙНЫМИ МИКРОСТРУКТУРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 1994 г. Н. Г. Кузнецова, С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 30.11.93 г.

Взаимодействия волн, вызванные неоднородностями параметров среды, влияют как на среднее поле [1], так и на энергетические характеристики поля, поскольку происходит существенное перераспределение энергии.

К проблеме учета многократного рассеяния волн при нахождении первого и второго моментов поля эффективно привлечение метода функции Грина, развитого первоначально в квантовой теории поля. В теории рассеяния с помощью этого метода удалось получить уравнение переноса как приближение к точному уравнению для корреляционной функции $\langle \varphi(\mathbf{r})\varphi^*(\mathbf{r}') \rangle$ – так называемому уравнению Бете–Солпитера [2, 3]. Воспользуемся методом функции Грина для вычисления средних потоков флуктуационной энергии между нормальными волнами в волноводе.

Рассмотрим двумерный волновод со случайными микроструктурными неоднородностями. Движение среды описывается неоднородным уравнением Гельмгольца

$$\Delta\varphi + k^2 [1 + \mu(x, z)] \varphi = \delta(x) \sqrt{\frac{2}{H}} \cos q_p z \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\varphi|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=0} = 0,$$

где $\mu(x, z)$ – центрированная δ -коррелированная случайная функция:

$$\langle \mu(x, z)\mu(x + \xi, z + \zeta) \rangle = \langle \mu^2 \rangle \rho^2 \delta(\xi)\delta(\zeta), \quad (2)$$

ρ – радиус корреляции микроструктуры, малый в сравнении с длиной волны ($k\rho \ll 1$). Решение уравнения (1) ищем в следующем виде [3]:

$$\varphi(x, z) = \sum_n \varphi_n(x) \sqrt{2/H} \cos q_n z.$$

Рассмотрим распределение потоков энергии для различных мод. Найдем поток энергии для моды $p < n_1$ (n_1 – целое от дроби $\frac{kH}{\pi}$):

$$Q = \langle \varphi_p \varphi_p^* \rangle c k_p / k, \quad (3)$$

где $c k_p / k = \partial\omega / \partial k_p = c_{гр}$ – групповая скорость p -й моды. Система уравнений Бете–Солпитера в лестничном приближении для рассматриваемой задачи имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \langle |\varphi_p(x - x_0)|^2 \rangle &= |C_p|^2 |\bar{G}_p(x - x_0)|^2 + \\ &+ k^4 \sum_{l,s} \int \bar{G}_p(x - x_1) \bar{G}_p^*(x - x_3) K_{pl,ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \\ &\times \langle \varphi_l(x_2 - x_0) \varphi_s^*(x_4 - x_0) \rangle dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned} \quad (4)$$

где $K_{pl,ps}$ – оператор интенсивности:

$$\begin{aligned} K_{pl,ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= \langle \mu_{pl}(x_1) \mu_{ps}^*(x_3) \rangle \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4), \end{aligned}$$

C_p – коэффициент возбуждения p -й моды нормальной волны, \bar{G}_p – средняя функция Грина для p -й моды в приближении Бурре, определенная в работе [3].

Учтем, что $\mu_{ps}^* = \mu_{sp}$ и что среднее от произведения на основании функции (2) вычислено [4]:

$$\langle \mu_{pl}(x_1) \mu_{sp}(x_3) \rangle = \langle \mu^2 \rangle \rho^2 \delta(x_1 - x_3) / H.$$

Тогда оператор интенсивности можно записать в следующем виде:

$$K_{pl,ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \delta_{ls} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3),$$

где δ_{ls} – символ Кронекера. Подставив его в уравнение (4), получим

$$\langle |\varphi_p(x-x_0)|^2 \rangle = |C_p|^2 |\bar{G}_p(x-x_0)|^2 + \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \int |\bar{G}_p(x-x_1)|^2 \sum_l \langle |\varphi_l(x-x_0)|^2 \rangle dx_1.$$

Если обозначить интенсивность $W_p = \langle |\varphi_p \varphi_p^*| \rangle$, то можно последнее уравнение переписать в виде:

$$W_p(x-x_0) = |C_p|^2 |\bar{G}_p(x-x_0)|^2 + \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \int |\bar{G}_p(x-x_1)|^2 \sum_l W_l(x_1-x_0) dx_1. \quad (5)$$

В уравнение входят лишь интенсивности $\langle |\varphi_p \varphi_p^*| \rangle = W_p$, а не билинейные композиции типа $\langle \varphi_p \varphi_l^* \rangle$. Это явилось результатом специального вида корреляционной матрицы $K_{pl,ps}$: ее зависимость от $(x-x_1)$ имеет вид δ -функции.

Проводя фурье-преобразование уравнения (5), получим:

$$W_{p\hat{q}} = \int_{-\infty}^{\infty} W_p(x) e^{-i\hat{q}x} dx,$$

$$W_{p\hat{q}} = |C_p|^2 |\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 + \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} |\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 \sum_l W_{l\hat{q}}.$$

Решением этой системы является функция

$$W_{p\hat{q}} = |C_p|^2 |\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 + \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \frac{|\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 \sum_m |\bar{G}_m|_{\hat{q}}^2 |C_m|^2}{1 - \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \sum_l |\bar{G}_l|_{\hat{q}}^2}. \quad (6)$$

Величина $|\bar{G}|_{\hat{q}}^2$ есть фурье-образ выражения:

$$|\bar{G}_p(x)|^2 = \frac{1}{4k_p^2} e^{-2\delta_p |x|},$$

$$|\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 = \frac{1}{k_p} \frac{\delta_p}{\hat{q}^2 + 4\delta_p}.$$

При $|p| \leq n_1$ [4] и $k^2 = k_0^2(1+i\eta)$

$$\delta_p = k_p \left(\frac{\eta_p}{2} + \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{4Hk_p^2} \sum_{-n_1}^{n_1} \frac{1}{k_m} \right), \quad (7)$$

$$\eta_p = \frac{k_0 \eta}{2k_{p0}}, \quad k_{p0} = \sqrt{k_0^2 - q_p^2},$$

при $|p| > n_1$

$$\delta_p = s_p \left(1 - \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{2Hs_p^2} \sum_{n_1+1}^{n_{\max}} \frac{1}{s_m} \right), \quad \frac{\pi n_{\max}}{H} \sim \frac{1}{\rho}. \quad (8)$$

Проанализируем полюсы выражения (6), являющиеся корнями уравнения

$$\frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \sum_l |\bar{G}_l|_{\hat{q}}^2 = 1. \quad (9)$$

Очевидно, что интенсивность, связанная с флуктуационным полем, затухает значительно медленнее, чем квадрат среднего поля, этому соответствует наименьшее значение корня \hat{q}_0 уравнения (9). Определим его, предположив, что $\hat{q}_0 \ll \delta_p$. Тогда

$$|\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 \approx \frac{1}{k_p^2} \frac{1}{4\delta_p}.$$

При $|p| \leq n_1$

$$|\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 \approx \frac{1}{k_p^2} \frac{1}{4\delta_{0p}},$$

где

$$\delta_{0p} = \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{4Hk_p^2} \sum_s \frac{1}{k_s},$$

при $|p| > n_1$

$$|\bar{G}_p|_{\hat{q}}^2 \approx \frac{1}{s_p^2} \frac{1}{4\delta_p}.$$

Поскольку предположено, что $\delta_{ip} \ll 1$, то в сумме

$\sum_{m=-n_{\max}}^{n_{\max}} |\bar{G}_m|_{\hat{q}}^2$ в уравнении (9) можно пренебречь

членами с $m > n_1$. Физически это означает, что закритические волны не дают заметного вклада в распределение флуктуационной интенсивности поля вдоль волновода.

Уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\sum_{m=-n_1}^{n_1} \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{Hk_m^2} \frac{\delta_m}{\hat{q}^2 + 4\delta_m^2} - 1 = 0.$$

Воспользовавшись предположением, что $\frac{\hat{q}^2}{4\delta_m^2} \ll 1$,

и выразив δ_m^2 согласно уравнению (7), получим:

$$1 - \sum_m \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{k_m^2 H} \frac{\delta_m}{4\delta_m^2} \left[1 - \frac{q_0^2}{4\delta_m^2} \right] = 0. \quad (10)$$

Предположим, что

$$\frac{\eta_m}{2} \ll \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{4k_m^2 H} \sum_s \frac{1}{k_s} \quad (11)$$

или

$$\eta \ll \frac{k \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H},$$

что позволяет δ_m в уравнении (7) представить в виде:

$$\delta_m = \delta_{m0} \left(1 + \frac{\eta_m k_m}{2\delta_{m0}} \right). \quad (12)$$

С учетом формул (11) и (12) равенство (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \sum_m \frac{1}{k_m^2} \frac{k_m H}{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2 \sum_s \frac{1}{k_s}} \times \\ & \times \left[1 - \frac{\eta_m k_m}{2\delta_{m0}} - \frac{\hat{q}_0}{4\delta_{m0}^2} \right] = \\ & = \frac{1}{\sum_s \frac{1}{k_s}} \sum_m \frac{1}{2k_m \delta_{m0}} \left(\eta_m k_m + \frac{\hat{q}_0^2}{2\delta_{m0}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует:

$$\hat{q}_0 = \pm i \left[\frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{2H \sum_m k_m} \sum_s \frac{1}{k_s} \sum_l \eta_l k_l \right]^{1/2}. \quad (14)$$

В левой части соотношения (13) выражение

$$\frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \sum_m \frac{1}{k_m^2} \frac{k_m H}{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2 \sum_s \frac{1}{k_s}}$$

обращается в единицу. Это следует интерпретировать как сохранение полного потока энергии в совокупности каналов в отсутствие потерь. Во всех суммах в формуле (14) суммирование ведется

в интервале $[-n_1, n_1]$. В частном случае, когда возбуждена лишь нулевая нормальная волна с $n_1 = 0$:

$$\hat{q}_0 = \pm \left(\frac{k^3 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{2H} \right)^{1/2},$$

флуктуационную часть p -й компоненты интенсивности в формуле (6) можно приближенно представить с учетом (14) в форме:

при $|p| < n_1$

$$W_{pq}^{\text{фл}} \approx \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{4k_p H} \frac{\sum_s \frac{1}{k_s} \sum_l |C_l|^2 \frac{1}{k_l}}{(\hat{q}^2 - \hat{q}_0^2) \sum_m k_m},$$

при $|p| > n_1$

$$W_{pq}^{\text{фл}} \approx \frac{1}{64} \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \frac{1}{s_p^3} \frac{\left(\sum_s \frac{1}{k_s} \right)^2 \sum_l |C_l|^2 \frac{1}{k_l}}{(\hat{q}^2 - \hat{q}_0^2) \sum_m k_m}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье найдем величины $W_p(x)$:

при $|p| < n_1$

$$W_p(x) = \frac{1}{4k_p} \frac{\hat{q}_0}{\sum_l \eta_l k_l} \sum_m |C_m|^2 \frac{1}{k_m} e^{-\hat{q}_0 |x|}, \quad (15)$$

при $|p| > n_1$

$$W_p(x) = \frac{1}{64} \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \frac{1}{s_p^3} \sum_s \frac{1}{k_s} \sum_l |C_l|^2 \frac{1}{k_l} \frac{\hat{q}_0 e^{-\hat{q}_0 |x|}}{\sum_m \eta_m k_m}. \quad (16)$$

Составив с помощью формулы $Q_p = \langle \varphi_p \varphi_p^* \rangle c k_p / k$ и формулы (15) выражение для флуктуационной части потока энергии для докритических нормальных волн, убеждаемся, что эта величина одинакова для всех $|p| < n_1$.

Найдем отношение средней интенсивности нормальной волны закритического номера (16) к средней интенсивности волны докритического номера (15):

$$\frac{W_{p > n_1}}{W_{p < n_1}} = \frac{1}{16} \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H} \frac{k_{p < n_1}}{s_{p > n_1}^3} \sum_{m=-n_1}^{n_1} \frac{1}{k_m}.$$

Из полученных результатов можно сделать следующие основные выводы:

– средние потоки флуктуационной энергии при условии (11) для всех нормальных волн ниже критического номера равны друг другу, и их экспоненциальное спадание с расстоянием происхо-

дит с показателем экспоненты, пропорциональным корню из среднего квадрата флуктуации показателя преломления, умноженного на коэффициент потерь;

– на закритических нормальных волнах спадающие средней энергии с расстоянием происходит по тому же закону, однако величина средней энергии

в $\frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle \rho^2}{H s_p^3}$ раз меньше, чем на докритических

модах колебаний и убывает с ростом номера моды как p^{-3} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
2. Salpeter E.E., Bethe H.A. // Phys. Rev. 1951. V. 84. № 6. P. 1232.
3. Рыбак С.А. Постоянные распространения нормальных волн в волноводе со случайными неоднородностями // Сб. Акустика в судостроении. Вып. 213. Л.: Судостроение, 1974. С. 127 - 138.
4. Кузнецова Н.Г., Рыбак С.А. Исследование среднего поля в волноводе во случайными микроструктурными неоднородностями // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 1049 - 1054.