

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

© 1995 г. С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников

Тульский государственный технический университет

300058 Тула, ул. Батищева, 12

Поступила в редакцию 22.02.94 г.

Рассматривается рассеяние звука слоисто-неоднородной анизотропной толстостенной цилиндрической оболочкой. Краевая задача для уравнений движения полого упругого цилиндра сводится к задаче с начальными условиями. Представлены результаты расчетов амплитуды обратного рассеяния для одного вида неоднородности материала трансверсально-изотропных оболочек.

Исследованию рассеяния звуковых волн неоднородными цилиндрическими объектами посвящен ряд работ [1 - 3]. При этом упругий материал рассеивателей полагался изотропным. В данной работе решается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны трансверсально-изотропным неоднородным полым цилиндром, заполненным жидкостью.

Рассмотрим бесконечный трансверсально-изотропный неоднородный полый круговой цилиндр с внешним радиусом r_1 и внутренним r_2 , модули упругости и плотность материала которого описываются непрерывными функциями координаты r . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z является осью вращения цилиндра и одновременно осью цилиндрической анизотропии упругого материала слоя. Будем считать, что окружающая и находящаяся в полости жидкости являются идеальными и однородными, имеющими плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из внешнего пространства на упругий цилиндр наклонно падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен $\psi_p = \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)]$, где \mathbf{k}_1 - волновой вектор, \mathbf{r} - радиус-вектор, ω - круговая частота. В дальнейшем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускаем. В цилиндрической системе координат падающая волна может быть представлена в виде [4]

$$\psi_p = \exp(ik_{1z}z) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m J_m(k_{1r}r) \cos m\varphi, \quad (1)$$

где $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ - проекция волнового вектора \mathbf{k}_1 на ось z (без ограничения общности полагаем, что \mathbf{k}_1 лежит в плоскости $\varphi = 0, \pi$), $k_1 = \omega/c_1$, $k_{1r} = (k_1^2 - k_{1z}^2)^{1/2}$, θ_0 - угол между вектором \mathbf{k}_1 и осью z , $\gamma_m = (2 - \delta_{0m})i^m$, δ_{0m} - символ Кронекера, $J_m(x)$ - функция Бесселя порядка m .

Определим отраженную от цилиндра и возбужденную в полости волны, а также найдем поле деформаций в упругом слое.

Для получения уравнений распространения упругих волн в неоднородном анизотропном слое воспользуемся общими уравнениями движения упругой среды в цилиндрических координатах [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \rho \ddot{u}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= \rho \ddot{u}_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \ddot{u}_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho = \rho(r)$ - плотность материала, u_r, u_φ, u_z - составляющие вектора смещения по осям координат, σ_{jk} - компоненты тензора напряжений, которые в общем случае анизотропии связаны с компонентами тензора деформаций ϵ_{lm} следующим образом:

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jklm} \epsilon_{lm}, \quad (3)$$

где $\lambda_{jklm} = \lambda_{jklm}(r)$ - модули упругости анизотропного материала. В дальнейшем будем пользоваться двухиндексным обозначением модулей упругости вида λ_{kl} , где $k, l = 1, 2, \dots, 6$.

Так как неоднородность материала цилиндра проявляется лишь в радиальном направлении, то зависимость составляющих вектора смещения от координаты z , согласно закону Снеллиуса, имеет вид $\exp(ik_{1z}z)$. Поэтому функции u_r, u_φ и u_z будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= U_1(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z), \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= U_2(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z), \\ u_z(r, \varphi, z) &= U_3(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z). \end{aligned} \quad (4)$$

В аналогичной форме представим компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \varphi, z) &= \sigma_1(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z), \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi, z) &= \sigma_2(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z), \\ \sigma_{rz}(r, \varphi, z) &= \sigma_3(r, \varphi) \exp(ik_{1z}z). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая в качестве поверхностей изотропии поверхности $r = \text{const}$, заметим, что вектор смещения является периодической функцией полярного угла φ , а его компоненты u_r, u_z в рассматриваемом случае – четные функции координаты φ , составляющая же u_φ – нечетная функция φ . Поэтому множители U_1, U_2 и U_3 могут быть представлены следующими рядами Фурье:

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{1m}(r) \cos m\varphi, \\ U_2(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m}(r) \sin m\varphi, \\ U_3(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{3m}(r) \cos m\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

а величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – в виде разложений

$$\begin{aligned} \sigma_1(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{1m}(r) \cos m\varphi, \\ \sigma_2(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}(r) \sin m\varphi, \\ \sigma_3(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{3m}(r) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя представления (4) - (7) и известные выражения [5] компонент тензора деформаций через компоненты смещений, а также учитывая ортогональность функций $\cos m\varphi, \sin m\varphi$, из соотношений закона Гука (3) выразим производные (по координате r) U'_{jm} через функции $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m}$. Объединяя полученные выражения с уравнениями движения (2), приходим к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}, \sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m}$ для каждого $m = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \mathbf{A}\mathbf{U}/r + \mathbf{B}\mathbf{P}, \\ \mathbf{P}' &= (\mathbf{C}/r^2 - \rho\omega^2\mathbf{I})\mathbf{U} + \mathbf{D}\mathbf{P}/r, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{U} = (U_{1m}, U_{2m}, U_{3m})^T, \mathbf{P} = (\sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m})^T, \mathbf{I}$ – единичная матрица размерности 3×3 ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_{12}/\lambda_{11} & -m\lambda_{12}/\lambda_{11} & s\lambda_{12}/\lambda_{11} \\ m & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_{55} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda & m\lambda & -s\mu \\ m\lambda & m^2\lambda - s^2\lambda_{44} & -ms(\mu + \lambda_{44}) \\ s\mu & ms(\mu + \lambda_{44}) & m^2\lambda_{44} - s^2\lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_{12}/\lambda_{11} - 1 & -m & s \\ m\lambda_{12}/\lambda_{11} & -2 & 0 \\ s\lambda_{12}/\lambda_{11} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$s = -ik_{1z}r, \quad \lambda = \lambda_{22} - \lambda_{12}^2/\lambda_{11},$$

$$\mu = \lambda_{23} - \lambda_{12}^2/\lambda_{11}.$$

Заметим, что непосредственное использование уравнений движения в форме (2) (без перехода к записи в деформациях) дает возможность при вычислении коэффициентов правой части системы (8) обойтись без использования производных от модулей упругости. Это позволяет, как и в случае изотропного материала [1], ограничиться требованием кусочной непрерывности функций, описывающих зависимость материальных параметров упругого слоя от r .

Отраженная и возбужденная в полости звуковые волны являются решениями уравнений Гельмгольца. При этом отраженная волна должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковое поле в полости – условию ограниченности. Поэтому потенциалы скоростей рассеянной ψ_1 и возбужденной ψ_2 волн будем искать в виде

$$\psi_1 = \exp(ik_{1z}z) \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(k_{1r}r) \cos m\varphi, \quad (9)$$

$$\psi_2 = \exp(ik_{1z}z) \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(k_{2r}r) \cos m\varphi,$$

где, согласно закону Снеллиуса, $k_{2z} = k_{1z}, k_{2r} = (k_2^2 - k_{2z}^2)^{1/2}, k_2 = \omega/c_2$ – волновое число внутренней жидкости, $H_m(x)$ – функция Ханкеля первого рода порядка m .

Неизвестные коэффициенты A_m и B_m подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей

частиц упругой среды и жидкости на внутренней и внешней поверхностях упругого цилиндра, отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1 \quad & -i\omega u_r = v_{1r}, \\ & \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\ & \sigma_{rr} = -p_1; \\ \text{при } r = r_2 \quad & -i\omega u_r = v_{2r}, \\ & \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\ & \sigma_{rr} = -p_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $v_{1r} = \frac{\partial}{\partial r}(\psi_p + \psi_1)$, $p_1 = i\omega\rho_1(\psi_p + \psi_1)$ и $v_{2r} = (\partial/\partial r)\psi_2$, $p_2 = i\omega\rho_2\psi_2$ — нормальные компоненты скоростей частиц жидкости и акустические давления вне цилиндра и в полости соответственно.

Подставим выражения (1), (4) - (7), (9) в условия (10). В результате для каждого m получим систему восьми уравнений, из которых находим выражения для коэффициентов A_m и B_m :

$$A_m = -[\gamma_m J'_m(k_{1r}r_1) + i\omega U_{1m}(r_1)/k_{1r}] / H'_m(k_{1r}r_1), \quad (11)$$

$$B_m = -i\omega U_{1m}(r_2) / [k_{2r} J'_m(k_{2r}r_2)]$$

и шесть условий для нахождения частного решения системы (8):

$$[EU + P]_{r=r_1} = G, \quad (12)$$

$$[FU + P]_{r=r_2} = 0, \quad (13)$$

где

$$E_{ij} = \delta_{ij} \delta_{j1} \omega^2 \rho_1 H_m(k_{1r}r_1) / [k_{1r} H'_m(k_{1r}r_1)],$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} \delta_{j1} \omega^2 \rho_2 J_m(k_{2r}r_2) / [k_{2r} J'_m(k_{2r}r_2)],$$

$$G_i = \delta_{i1} \times 2\gamma_m \omega \rho_1 / [\pi k_{1r} r_1 H'_m(k_{1r}r_1)].$$

Коэффициенты A_m, B_m могут быть вычислены лишь после определения значений функции U_{1m} на поверхностях слоя.

Краевую задачу (8), (12), (13) сведем к задачам с начальными условиями. Найдем три линейно независимых решения дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющих граничным условиям (13). В качестве начальных условий для них могут быть выбраны условия

$$U_j|_{r=r_2} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \end{pmatrix}, \quad P_j|_{r=r_2} = -FU_j|_{r=r_2} \quad (14)$$

($j = 1, 2, 3$).

Решения задач Коши (8), (14) можно провести одним из численных методов.

Система (8) и условия (13) являются однородными. Поэтому решением системы (8), удовлетворяющим условиям (13), будет являться любая линейная комбинация, составленная из решений указанных задач Коши. $U = \sum_{j=1}^3 C_j U_j$ и $P = \sum_{j=1}^3 C_j P_j$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Коэффициенты C_j определим из краевого условия (12). Для этого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений $C_j(P_j + EU_{r=r_1}) = G$.

Определив множители C_j , найдем функции U_{1m}, U_{2m}, U_{3m} . Теперь по формулам (11) вычислим коэффициенты A_m и B_m . В результате анализ акустических полей можем проводить с помощью разложений (9).

Представленное решение позволяет легко получить решение задачи о рассеянии звука изотропной цилиндрической оболочкой. Для этого достаточно положить $\lambda_{11} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{23} = \lambda$, $\lambda_{55} = \mu$, где λ и μ — коэффициенты Ламе изотропной среды.

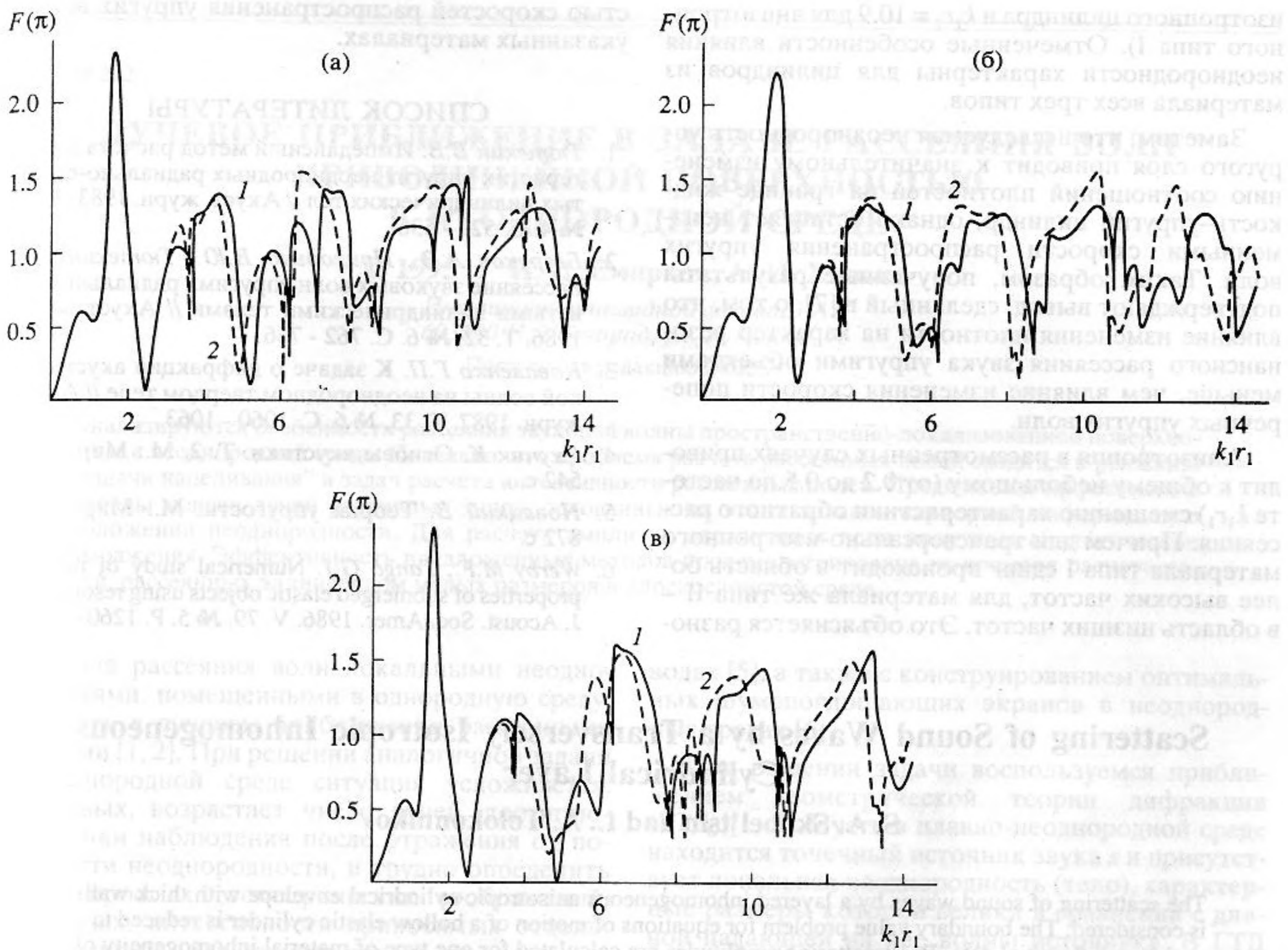
Отметим, что в случае если интерес представляет только рассеянное звуковое поле, то возможно использование импедансного метода, предложенного в работах [1, 2], когда краевая задача (8), (12), (13) заменяется задачей с начальными условиями для системы шести независимых уравнений из девяти нелинейных дифференциальных уравнений типа Рикатти относительно импедансов неоднородного слоя.

На основе полученного решения были проведены расчеты функции формы рассеяния $F(\varphi) = \sqrt{2/r_1} |A(\varphi)|$ в случае нормального падения плоской звуковой волны для двух типов трансверсально-изотропных цилиндрических слоев. Здесь $A(\varphi)$ представляет собой нормированную амплитуду рассеяния в дальней зоне поля. Полагалось, что соотношение внешнего и внутреннего радиусов упругого слоя $r_1/r_2 = 2$, а окружающая и находящаяся в полости жидкость — вода. Для двух выбранных типов неоднородного анизотропного материала были приняты следующие средние значения модулей упругости:

тип I: $\lambda_{11} = 5.74 \times 10^{10}$ Н/м², $\lambda_{12} = 3.28 \times 10^{10}$, $\lambda_{23} = 16.4 \times 10^{10}$, $\lambda_{55} = 2.54 \times 10^{10}$;

тип II: $\lambda_{11} = 16.4 \times 10^{10}$ Н/м², $\lambda_{12} = 0.819 \times 10^{10}$, $\lambda_{23} = 5.74 \times 10^{10}$, $\lambda_{55} = 2.95 \times 10^{10}$.

Указанные материалы отличаются тем, что максимум фазовой скорости в материале типа I достигается в направлении касательной к поверхности изотропии, а в материале типа II — в направлении оси упругой симметрии, т.е. в радиальном направлении. При этом максимальные (минимальные) значения фазовых скоростей в обоих



Амплитуды обратного рассеяния для цилиндра из изотропного (а) и для трансверсально-изотропного материалов типа I, II (б и в соответственно): 1 – однородный материал, 2 – неоднородный материал.

случаях совпадают, а отношение $v_{\max}/v_{\min} \approx 1.7$. Для оценки влияния анизотропии материала слоя на рассеяние звука были выполнены расчеты и для изотропного слоя, материал которого имеет такую же плотность и занимает промежуточное положение по скорости продольных волн относительно скоростей квазипродольных волн в выбранных анизотропных материалах. Численные исследования проводились как для случая однородных материалов с плотностью $\rho_0 = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, так и для случая неоднородных слоев с одинаковой зависимостью $f(r) = u[0.2 + \exp(-4(r/r_2 - 1))]$ плотности и модулей упругости от r , где множитель выбран так, чтобы среднее по толщине слоя значение функции $f(r)$ было равно единице.

На рисунке представлены зависимости амплитуды обратного рассеяния $F(\pi)$ от частоты $k_1 r_1$. Пунктирными линиями на графиках обозначены зависимости для однородного слоя, сплошными – для неоднородного. Из графиков видно, что в представленном диапазоне частот ($k_1 r_1 \leq 14$) неод-

нородность материала не вызывает существенных изменений в характере частотной зависимости коэффициента обратного рассеяния. Неоднородность приводит к общему незначительному сдвигу частотной характеристики в область больших частот. Сдвиг практически отсутствует для частот $k_1 r_1 < 4$ и возрастает до 0.5 в конце рассматриваемого интервала. Кроме того, для неоднородного случая наблюдается заметное искажение отдельных элементов характеристики. Например, небольшие локальные максимумы для однородных материалов на частоте $k_1 r_1 = 6.2$ в изотропном слое и $k_1 r_1 = 8.3$ – в анизотропном слое типа I заметно увеличиваются (со сдвигом вправо) в характеристиках для неоднородного случая. В анизотропном цилиндре типа II на частоте $k_1 r_1 \approx 6$, наоборот, наблюдается уменьшение локального максимума характеристики. И наконец, при частотах $k_1 r_1 > 10$ в характеристиках неоднородных рассеивателей появляются дополнительные резонансы (см., например, $k_1 r_1 = 10.1; 10.8$ для

изотропного цилиндра и $k_1 r_1 = 10.9$ для анизотропного типа I). Отмеченные особенности влияния неоднородности характерны для цилиндров из материала всех трех типов.

Заметим, что исследуемая неоднородность упругого слоя приводит к значительному изменению соотношений плотностей на границе жидкость-упругий цилиндр, однако оставляет неизменными скорости распространения упругих волн. Таким образом, полученные результаты подтверждают вывод, сделанный в [7], о том, что влияние изменения плотности на характер резонансного рассеяния звука упругими объектами меньше, чем влияние изменения скорости поперечных упругих волн.

Анизотропия в рассмотренных случаях приводит к общему небольшому (от 0.2 до 0.5 по частоте $k_1 r_1$) смещению характеристики обратного рассеяния. Причем для трансверсально-изотропного материала типа I сдвиг происходит в область более высоких частот, для материала же типа II – в область низших частот. Это объясняется разно-

стью скоростей распространения упругих волн в указанных материалах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютюкин В.В. Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 4. С. 529 - 536.
2. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 762 - 766.
3. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1060 - 1063.
4. Скучик К. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Werby M.F., Tango G.J. Numerical study of material properties of submerged elastic objects using resonance // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 5. P. 1260 - 1268.

Scattering of Sound Waves by a Transversely Isotropic Inhomogeneous Cylindrical Layer

S. A. Skobel'tsin and L. A. Tolokonnikov

The scattering of sound waves by a layered inhomogeneous anisotropic cylindrical envelope with thick walls is considered. The boundary value problem for equations of motion of a hollow elastic cylinder is reduced to a problem with initial data. Backscattering amplitudes are calculated for one type of material inhomogeneity of transversely isotropic envelopes.