

УДК 534.231

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ОКЕАНЕ, ПЛАВНО НЕОДНОРОДНОМ ПО ГОРИЗОНТАЛИ, И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

© 1995 г. К. В. Авилов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 11.02.94 г.

Предложена математическая модель распространения низкочастотного гармонического звука в океане с двумерными и трехмерными неоднородностями, медленной зависимостью свойств среды – скорости звука и плотности в водной толще и дне и рельефа дна – от горизонтальных координат, произвольной зависимостью от глубины в приближении однонаправленного распространения (параболическом приближении) и алгоритм ее численной реализации, обеспечивающий любую наперед заданную точность вычислений в любом наперед заданном интервале углов скольжения локальных нормальных волн (сверхширокоугольность) при любых значениях параметров среды.

Рассмотрим применение метода аддитивной факторизации вначале на примере уравнений акустики неподвижной жидкой среды с двумерными неоднородностями.

Распространение гармонического звука в жидком трехмерном полупространстве, инвариантном относительно сдвига по оси y , описывается следующей системой уравнений двумерной акустики (первые два – линейризованные уравнения Ньютона, третье – линейризованное уравнение непрерывности) [1]:

$$\begin{pmatrix} D_x & 0 & -i\omega\rho \\ D_z & -i\omega\rho & 0 \\ -i\omega\rho^{-1}C^{-2} & D_z & D_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_z \\ v^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_z \\ V \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$(x, z) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$

и условием предельного поглощения

$$\text{Im} C < 0 \Rightarrow |p(x, z)| < M, \quad (x, z) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty).$$

Здесь p – акустическое давление; v_x, v_z – декартовы компоненты акустической скорости; f_x, f_z – декартовы компоненты объемной плотности сторонних сил, действующих на среду; V – плотность сторонней объемной скорости; ρ – комплексная плотность среды; C – комплексная скорость звука в среде (все перечисленные величины зависят от обеих декартовых координат x и y); ω – круговая частота; D_x, D_z – частные производные по пространственным координатам; i – мнимая единица;

M – число. Преобразуем уравнения (1), домножив их слева на неособенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & D_z(i\omega\rho)^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученных уравнений можно вычленить систему уравнений, содержащих только акустическое давление и горизонтальную компоненту скорости

$$\begin{pmatrix} D_x p \\ D_x v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\omega R \\ i\omega B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x \\ w \end{pmatrix},$$

$$p(x) = p(x, z), \quad v_x(x) = v_x(x, z), \quad (2)$$

$$Rv = \rho(x, z)v_x(x, z),$$

$$Bp(x) = (\rho^{-1}(x, z)C^{-2}(x, z) - D_z((i\omega)^2\rho(x, z))^{-1}D_z)p(x, z),$$

$$f_z(x) = f_z(x, z), \quad w(x) = V(x, z) - D_z(i\omega\rho(x, z))^{-1}f_z(x, z).$$

Операторные уравнения (2) являются инвариантной относительно базиса формой волноводных уравнений [2]: полагая для простоты $R = I$ и принимая во внимание то обстоятельство, что в базисе локальных нормальных волн $\phi_l(x, z)$ оператор B имеет диагональную форму

$$B(x) = \hat{\Phi}(x)C^{-2}(x)\hat{\Phi}^{-1}(x), \quad \hat{\Phi}(x) = \text{row} \{ \hat{\phi}_l(x) \},$$

$$C(x) = \text{diag} \{ C_l \},$$

где через C_l обозначена фазовая скорость l -й локальной нормальной волны, получим для

амплитуд локальных нормальных волн давления $\mathbf{a}(x) = \hat{\Phi}^{-1}(x) \mathbf{p}(x)$, и скорости $\mathbf{b}(x) = \hat{\Phi}^{-1}(x) \mathbf{v}(x)$ уравнения

$$D_x a_l(x) - i\omega b_l(x) = -\sum_k \gamma_{lk}(x) a_k(x),$$

$$D_x b_l(x) - i\omega C_l^{-2}(x) a_l(x) = -\sum_k \gamma_{lk}(x) b_k(x),$$

в которых $\gamma_{lk} = [\hat{\Phi}^{-1}(x)(D_x \hat{\Phi}(x))]_{lk}$ — коэффициенты взаимодействия локальных нормальных волн.

Преобразуем теперь уравнения (2), следуя идеям метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) — аддитивной факторизации решения на волны, бегущие влево и вправо. Предположим, что вне интервала горизонтальной координаты $x \in (a, b)$ наш волновод является слоистым, а все источники расположены внутри этого интервала. Вводя новые локальные амплитуды для волн, бегущих влево и вправо

$$\begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y^{-1}(x) & Y^{-1}(x) \\ Z(x) & -Z(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$S(x) = (\sqrt{R(x)} B(x) \sqrt{R(x)})^{1/2},$$

$$Y(x) = \sqrt{S(x)} \sqrt{R(x)}^{-1}, \quad Z(x) = \sqrt{R(x)}^{-1} \sqrt{S(x)},$$

и учитывая, что вне интервала (a, b) условию предельного поглощения могут удовлетворять только уходящие волны, мы получим в результате этого процесса аддитивной факторизации [3, 4] следующую систему уравнений:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{U} \\ \mathbb{L} & \mathbb{Q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \end{vmatrix},$$

$$\mathbb{P} = D_x - i\omega S(x) +$$

$$+ 1/2(Z^{-1}(x)(D_x Z(x)) - Y^{-1}(x)(D_x Y(x))),$$

$$\mathbf{u}^+(a) = 0,$$

$$\mathbb{Q} = D_x + i\omega S(x) +$$

$$+ 1/2(Z^{-1}(x)(D_x Z(x)) - Y^{-1}(x)(D_x Y(x))),$$

$$\mathbf{u}^-(b) = 0,$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{U} = -1/2(Z^{-1}(x)(D_x Z(x)) + Y^{-1}(x)(D_x Y(x))),$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \end{vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} Y & Z^{-1} \\ Y & -Z^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{w} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

решение которой может быть найдено путем применения итерационного процесса Гаусса–Зейделя [5, 6]

$$\mathbf{u}_k^+ = \mathbb{P}^{-1}(-\mathbb{U} \mathbf{u}_{k-1}^- + \mathbf{F}^+), \quad \mathbf{u}_k^- = \mathbb{Q}^{-1}(-\mathbb{L} \mathbf{u}_k^+ + \mathbf{F}^-), \quad (5)$$

сходящегося, если $\|\mathbb{P}^{-1} \mathbb{U} \mathbb{Q}^{-1} \mathbb{L}\| < 1$, где $\|\cdot\|$ обозначает какую-либо норму. Для ρ и C , плавно зависящих от горизонтальной координаты x , операторы \mathbb{U} и \mathbb{L} оказываются малыми и при корректно поставленных задачах Коши для операторов \mathbb{P} и \mathbb{Q} сходимость процесса (5) представляется весьма правдоподобной. Из вида уравнений (5) можно сделать вывод, что операторы \mathbb{L} и \mathbb{U} описывают обратное рассеяние, а \mathbb{P} и \mathbb{Q} — распространение (члены $\pm i\omega S$) и прохождение через горизонтальные неоднородности.

Полагая в качестве начального — нулевого — приближения нулевое поле, мы получим для первого приближения волн, бегущих вправо \mathbf{u}_1^+ и влево \mathbf{u}_1^- , уравнения

$$\mathbb{P} \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{F}^+, \quad \mathbb{Q} \mathbf{u}_1^- = \mathbf{F}^-.$$

В базисе локальных нормальных волн они принимают известный вид волноводных уравнений для однонаправленного распространения [2]

$$D_x c_l^+ - i\omega C_l^{-1} c_l^+ =$$

$$= -\sum_k \gamma_{lk} (C_l + C_k) (2\sqrt{C_l C_k})^{-1} + \{\Phi^{-1} \mathbf{F}^+\}_l,$$

$$D_x c_l^- + i\omega C_l^{-1} c_l^- =$$

$$= -\sum_k \gamma_{lk} (C_l + C_k) (2\sqrt{C_l C_k})^{-1} + \{\Phi^{-1} \mathbf{F}^-\}_l.$$

Предполагая коэффициенты взаимодействия γ_{lk} быстро убывающими с ростом разности номеров локальных нормальных $|l - k|$ и полагая поэтому [2]

$$(C_l + C_k) / (2\sqrt{C_l C_k})^{-1} \cong 1,$$

пренебрегая, таким образом, отличием коэффициентов прохождения через горизонтальные неоднородности от единицы, получим, переходя обратно к операторной форме записи, абстрактные псевдодифференциальные параболические уравнения

$$D_x \mathbf{u}_1^+ - i\omega S(x) \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{F}^+, \quad D_x \mathbf{u}_1^- + i\omega S(x) \mathbf{u}_1^- = \mathbf{F}^-, \quad (6)$$

служащие основой для получения всех прочих известных параболических уравнений в зависимости от приближений, используемых при аппроксимации оператора S и алгоритма решения получающегося вследствие этой аппроксимации дифференциального уравнения.

Отметим, что факторизация (3), (4) в случае самосопряженности оператора \mathbb{B} сохраняет форму выражения для потока энергии:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* \mathbf{v} &= (\mathbb{Y}^{-1}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-))^* (\mathbb{Z}(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)) = \\ &= (\mathbf{u}^+)^* \mathbf{u}^+ - (\mathbf{u}^-)^* \mathbf{u}^-. \end{aligned}$$

Более того, при такой факторизации для уравнений первого приближения волн, бегущих влево и вправо, т.е. $\mathbb{P} \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{F}^+$ и $\mathbb{Q} \mathbf{u}_1^- = \mathbf{F}^-$ в точности выполняется принцип взаимности.

Однако при практических расчетах на доступных нам вычислительных системах целесообразно в некоторой степени пожертвовать точностью ради уменьшения объемов вычислений. Если необходимо вычислить только звуковое давление, то благодаря простоте соотношения

$$\mathbf{p} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-$$

представляется интересной факторизация вида

$$\begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{Z}(x) & -\mathbb{Z}(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{vmatrix},$$

$$\mathbb{S}(x) = \sqrt{\mathbb{R}(x) \mathbb{B}(x)},$$

$$\mathbb{Z}(x) = \mathbb{R}^{-1}(x) \mathbb{S}(x) = \mathbb{B}(x) \mathbb{S}^{-1}(x).$$

Уравнения (4) приобретают следующий вид:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{U} \\ \mathbb{L} & \mathbb{Q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \end{vmatrix},$$

$$\mathbb{P} = D_x - i\omega \mathbb{S}(x) + 1/2 \mathbb{Z}^{-1}(x) (D_x \mathbb{Z}(x)),$$

$$\mathbf{u}^+(a) = 0,$$

$$\mathbb{Q} = D_x + i\omega \mathbb{S}(x) + 1/2 \mathbb{Z}^{-1}(x) (D_x \mathbb{Z}(x)),$$

$$\mathbf{u}^-(b) = 0,$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{U} = -1/2 \mathbb{Z}^{-1}(x) (D_x \mathbb{Z}(x)),$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{Z}^{-1} \\ \mathbb{I} & -\mathbb{Z}^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{w} \end{vmatrix},$$

что при пренебрежении отличием коэффициента прохождения от единичного вновь приводит к уравнениям (6), решения которых удовлетворяют принципу взаимности.

Для трехмерной цилиндрически-симметричной среды с источником, расположенным на оси симметрии, уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{vmatrix} D_r & 0 & -i\omega\rho \\ D_z & -i\omega\rho & 0 \\ -i\omega\rho^{-1}C^{-2} & D_z & r^{-1}D_r r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ v_z \\ v_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ f_z 2r^{-1}\delta(r) \\ V 2r^{-1}\delta(r) \end{vmatrix},$$

$$(r, z) \in (0, \infty) \times (0, H),$$

и задача их решения может быть сведена к предыдущей следующим образом: делая замены переменных $r = \exp(x)$, $\mathbf{w} = \exp(x) \mathbf{v}$, и исключая v_z , получим для $r > 0$

$$\begin{vmatrix} D_x \mathbf{p} \\ D_x \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i\omega \mathbb{R} \\ i\omega \exp(2x) \mathbb{B} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix},$$

а уравнение однонаправленного распространения, аналогичное (6) будет иметь вид (после возвращения к переменной r):

$$D_r \mathbf{p}_1^+ - i\omega \mathbb{S}(r) \mathbf{p}_1^+ + r^{-1}/2 = 0$$

или

$$\mathbf{p}_1^+ = r^{-1/2} \mathbf{q},$$

$$D_r \mathbf{q}^+ - i\omega \mathbb{S}(r) \mathbf{q}^+ = 0. \quad (7)$$

Предполагая среду в окрестности источника слоистой до таких расстояний, на которых становится справедливым простейшее асимптотическое приближение для функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(\omega sr) \approx (2/i\pi\omega sr)^{1/2} \exp(i\omega sr)$$

и принимая во внимание то обстоятельство, что оно удовлетворяет уравнениям (7), мы получим начальное значение для \mathbf{q} в следующем виде:

$$\mathbf{q}(0) = (\omega \mathbb{S}/2\pi i)^{-1/2} \mathbf{w}(z). \quad (8)$$

Уравнения (7, 8) позволяют полностью вычислить поле расходящейся от источника волны.

Применим теперь для численного решения уравнений (6) алгоритм метода экспоненциальной подгонки [7, 8]

$$\mathbf{u}^+(x+h) = \exp(i\omega h \mathbb{S}(x)) \mathbf{u}^+(x).$$

Действие оператором фактора распространения $\mathbb{E} = \exp(i\omega h \mathbb{S}(x))$ может быть осуществлено с любой наперед заданной степенью точности путем применения дробно-рациональных аппроксимаций [9]: если $f(\lambda) \equiv F_n(\lambda)/G_m(\lambda)$ (F_n, G_m — полиномы степеней n и m) в окрестности спектра оператора \mathbb{S} , то определение функции f от оператора \mathbb{T} по Риссу

$$f(\mathbb{T}) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I})^{-1} d\lambda,$$

где \mathbb{I} — единичный оператор, контур Γ охватывает спектр оператора \mathbb{T} , оставляя его слева, а сам

оператор \mathbb{T} предполагается таким, что интеграл сходится [10], приводит нас к выводу о том, что

$$f(S) \cong F_n(S)(G_m(S))^{-1}.$$

Аппроксимацию экспоненты от квадратного корня $\exp(ih\sqrt{\lambda})$ можно построить из известных аппроксимаций Падэ [11] экспоненты

$$\exp(\lambda) = (M_n(\lambda^2) + \lambda N_n(\lambda^2)) \times \\ \times (M_n(\lambda^2) - \lambda N_n(\lambda^2))^{-1} + E_n(\lambda)$$

и квадратного корня

$$\lambda^{1/2} = F_m(\lambda)(G_m(\lambda))^{-1} + H_m(\lambda),$$

где M_n, N_n, F_m, G_m — полиномы с вещественными коэффициентами, вычисляемые по некоторым рекуррентным соотношениям; E_m, H_n — ошибки аппроксимации, о которых известно, что они убывают с ростом m и n во всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной действительной полуоси. Комбинируя эти аппроксимации, получим

$$\exp(ih\lambda^{1/2}) = \\ = (G_m(\lambda)M_n(-h^2\lambda) + ihF_m(\lambda)N_n(-h^2\lambda)) \times \\ \times (G_m(\lambda)M_n(-h^2\lambda) - ihF_m(\lambda)N_n(-h^2\lambda))^{-1} = \quad (9) \\ = \prod_{k=1}^{k=n/2+m} (\lambda - \mu_k^*(h)) (\lambda - \mu_k(h))^{-1},$$

где μ_k — корни знаменателя приведенной выше дроби, а μ_k^* — комплексно им сопряжены. Нами вычислены μ_k для некоторых m, n, h . Все они оказались лежащими в IV квадранте комплексной плоскости и, следовательно, достаточно далеко удаленными от спектра оператора S^2 , лежащем в I и II квадрантах, что является обстоятельством, приводящим к устойчивости действия оператором \mathbb{E} . Ошибка аппроксимации в (9) убывает во всей комплексной плоскости с ростом n и m во всей комплексной плоскости, но практически важно получить хорошую аппроксимацию для части спектра S^2 , содержащей волновые числа распространяющихся нормальных волн и лежащей в окрестности точки $(1, 0)$ в верхней полуплоскости. Для примера заметим, что аппроксимация (9) с параметрами $m = 4, n = 8, h = 4\pi$ приводит для локальных нормальных волн с углами скольжения в диапазоне $\pm 60^\circ$ к ошибке в фазе менее, чем в 5×10^{-6} рад, что позволяет проводить вычисления звуковых полей в океане на частотах до 100 Гц и расстояниях до 9000 км с абсолютной фазовой ошибкой, не превосходящей $\pi/2$.

Преобразуем теперь аппроксимацию по (9) оператора \mathbb{E} следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{k=n/2+m} (\mathbb{R}\mathbb{B} - \mu_k^*(h)) (\mathbb{R}\mathbb{B} - \mu_k(h))^{-1} = \quad (10) \\ = \prod_{k=1}^{k=n/2+m} (\mathbb{I} - 2\text{Im}(\mu_k) (\mathbb{B} - \mu_k \mathbb{R}^{-1})^{-1} \mathbb{R}^{-1}).$$

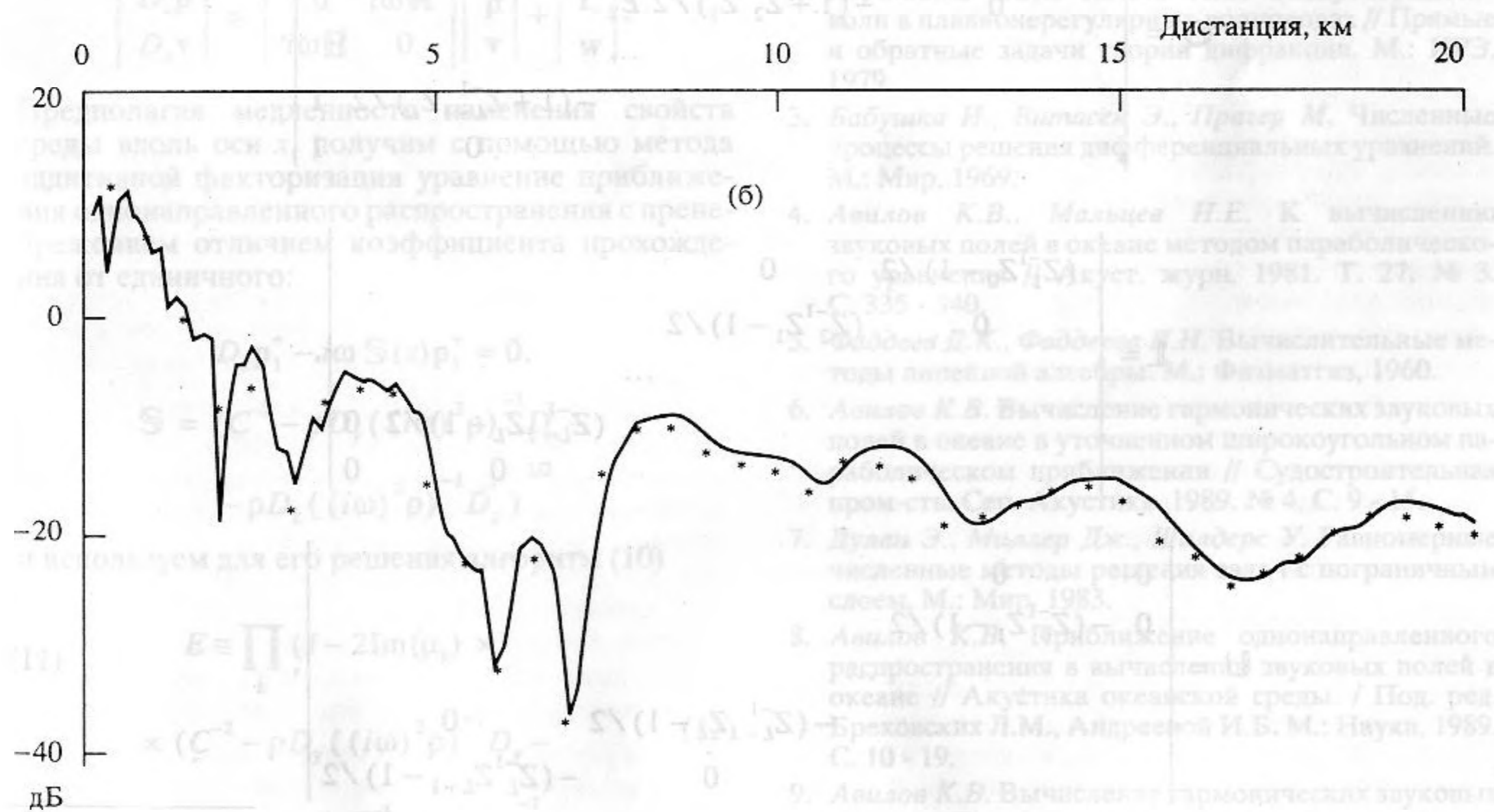
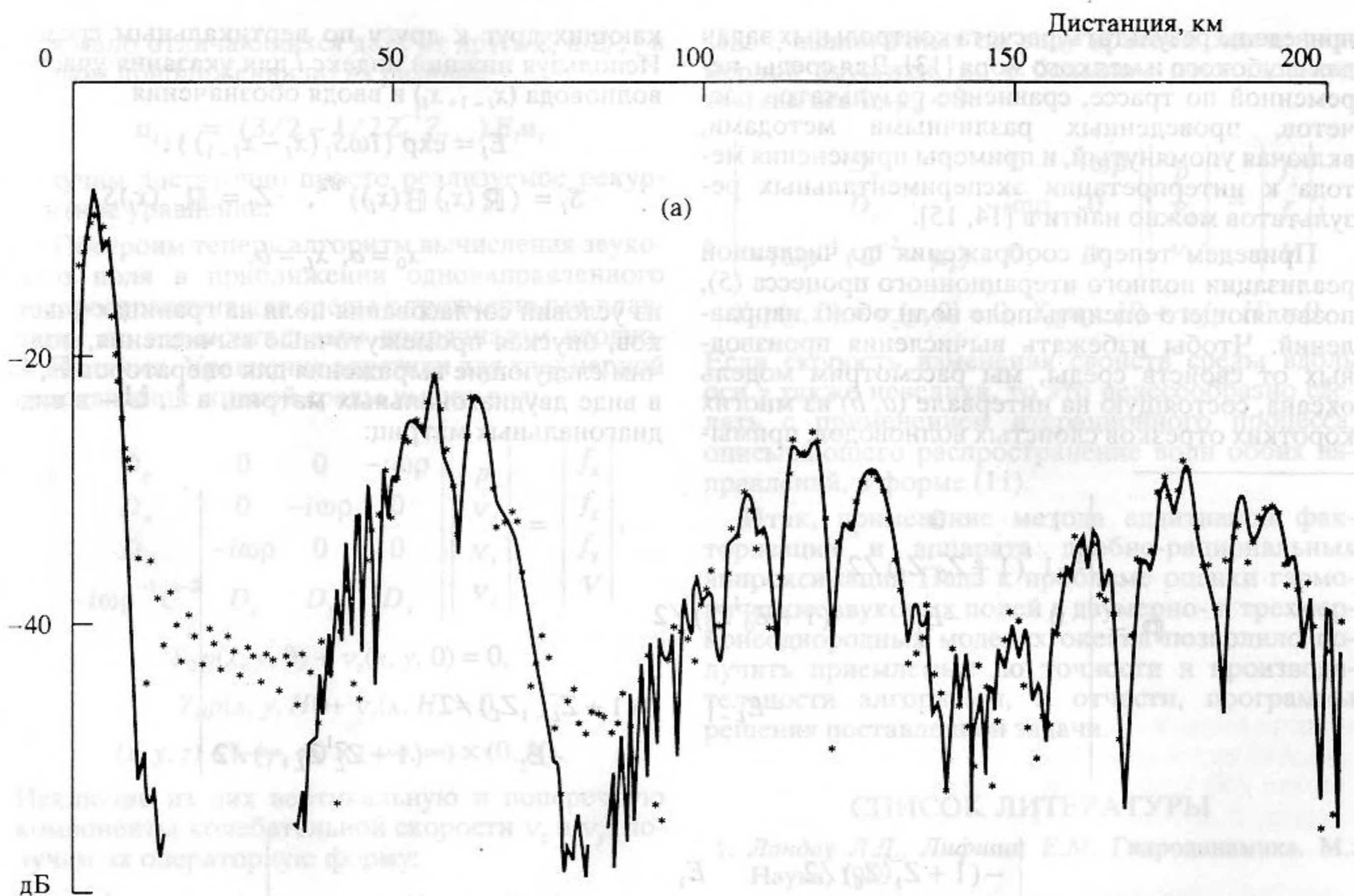
Из (10) видно, что для действия оператором \mathbb{E} достаточно решить K краевых задач вида

$$(\rho^{-1}(x, z)C^{-2}(x, z) - \mu_k \rho^{-1}(x, z) - \\ - D_z((i\omega)^2 \rho(x, z))^{-1} D_z) q_k(z) = \\ = \rho^{-1}(x, z) q_{k-1}(z),$$

$$q_0(z) = p(x, z), \quad q_k(z) = p(x + h, z)$$

с некоторыми граничными условиями. Если в граничные условия входит квадрат горизонтального волнового числа, как, например, для жидкого полупространства или твердой пластины на поверхности, то он заменяется в них на μ_k . Для решения этих краевых задач с применением цифровых вычислительных машин может быть осуществлено различными дискретными методами, из которых наиболее привлекательными нам представляются проекционно-сеточные методы [12], удачно сочетающие простоту реализации и сохраняющие достаточно высокую степень аппроксимации исходных дифференциальных задач благодаря специфической форме вида $\mathbb{B} - \mu_k \mathbb{R}^{-1} \approx \hat{M}^{-1} \hat{L}$ с ленточными матрицами \hat{M} и \hat{L} , построение которых по коэффициентам исходной дифференциальной задачи осуществляется достаточно просто.

На основе предложенных выше алгоритмов нами разработан пакет программ на языке ФОРТРАН, предназначенный для оценки распространения звука в океане на большие расстояния от источника в среде, свойства которой непостоянны как по вертикали, так и по горизонтали. Скорость вычислений этого пакета на IBM PC может быть охарактеризована следующим примером: на машине с производительностью 3.425×10^6 ед. по тесту DWHET (Ветстоуна с двойной точностью из поставки MsFortran) вычисления в модели океан + дно толщиной 10 км на частоте 25 Гц на дистанцию 200 км занимают 580 с при достаточной точности в диапазоне углов скольжения $\pm 35^\circ$. В слоистых волноводах результаты вычислений с применением упомянутого пакета практически идентичны результатам вычисления с применением метода нормальных волн. На рисунке



Сравнение результатов вычислений акустического поля по методу псевдодифференциального параболического уравнения (—) и методу нормальных волн (*). а – Глубокое море: атлантический профиль, глубина океана 5.5879 км, частота 25 Гц, глубина оси канала 1.015 км, глубина источника 0.2539 км, глубина приемника 0.8655 км. б – Мелкое море, глубина 0.24 км, частота 100 Гц, глубина оси канала 0.12 км, глубина источника 0.03 км, глубина приемника 0.09 км.

приведены результаты расчета контрольных задач для глубокого и мелкого моря [13]. Для среды, переменной по трассе, сравнение результатов расчетов, проведенных различными методами, включая упомянутый, и примеры применения метода к интерпретации экспериментальных результатов можно найти в [14, 15].

Приведем теперь соображения по численной реализации полного итерационного процесса (5), позволяющего оценить поле волн обоих направлений. Чтобы избежать вычисления производных от свойств среды, мы рассмотрим модель океана, состоящую на интервале (a, b) из многих коротких отрезков слоистых волноводов, примы-

кающих друг к другу по вертикальным срезам. Используя нижний индекс l для указания участка волновода (x_{l-1}, x_l) и вводя обозначения

$$E_l = \exp(i\omega S_l(x_l - x_{l-1})),$$

$$S_l = (\mathbb{R}(x_l) \mathbb{B}(x_l))^{1/2}, \quad Z_l = \mathbb{R}^{-1}(x_l) S_l,$$

$$x_0 = a, \quad x_L = b,$$

из условий согласования поля на границах участков, опуская промежуточные вычисления, получим следующие выражения для операторов \mathbb{P}, \mathbb{Q} в виде двудиagonalных матриц, а \mathbb{L}, \mathbb{U} – в виде диагональных матриц:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ -1 & (1 + Z_0^{-1}Z_1)/2 & & & & \\ 0 & -E_1 & (1 + Z_0^{-1}Z_2)/2 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & -E_{L-1} & (1 + Z_{L-1}^{-1}Z_L)/2 & & 0 \\ & & & -E_L & (1 + Z_L^{-1}Z_{L+1})/2 & \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -(1 + Z_1^{-1}Z_0)/2 & E_1 & & & & \\ 0 & -(1 + Z_2^{-1}Z_1)/2 & E_2 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -(1 + Z_{L+1}^{-1}Z_L)/2 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} (Z_1^{-1}Z_0 - 1)/2 & 0 & & & & \\ 0 & (Z_2^{-1}Z_1 - 1)/2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & (Z_{L+1}^{-1}Z_L - 1)/2 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & -(Z_0^{-1}Z_1 - 1)/2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -(Z_{L-1}^{-1}Z_L - 1)/2 & 0 & \\ & & & 0 & -(Z_L^{-1}Z_{L+1} - 1)/2 & \end{pmatrix},$$

не содержащих производных от свойств среды. Действие операторами Z и Z^{-1} может быть осуществлено с применением аппроксимаций Падэ. Уравнение приближения однонаправленного рас-

пространения первого порядка с учетом неединичности оператора прохождения приобретает вид:

$$u_{l+1} = 2(1 + Z_l^{-1}Z_{l+1})^{-1} E_l u_l.$$

Для мало отличающихся друг от друга Z_l и Z_{l+1} в первом приближении по их разнице

$$u_{l+1} = (3/2 - 1/2Z_l^{-1}Z_{l+1}) E_l u_l$$

получим достаточно просто реализуемое рекуррентное уравнение.

Построим теперь алгоритм вычисления звукового поля в приближении однонаправленного распространения для среды с трехмерными плавными по горизонтальным координатам неоднородностями. Уравнения акустики для трехмерной неподвижной жидкой среды имеют вид:

$$\begin{vmatrix} D_x & 0 & 0 & -i\omega\rho \\ D_y & 0 & -i\omega\rho & 0 \\ D_z & -i\omega\rho & 0 & 0 \\ -i\omega\rho^{-1}C^2 & D_z & D_y & D_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ v_z \\ v_y \\ v_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x \\ f_z \\ f_y \\ V \end{vmatrix},$$

$$Y_0 p(x, y, 0) + v_z(x, y, 0) = 0,$$

$$Y_H p(x, y, H) + v_z(x, y, H) = 0,$$

$$(x, y, z) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (0, H).$$

Исключив из них вертикальную и поперечную компоненты колебательной скорости v_z и v_y , получим их операторную форму:

$$\begin{vmatrix} D_x p \\ D_x v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i\omega R \\ i\omega B & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_x \\ w \end{vmatrix},$$

Предполагая медленность изменения свойств среды вдоль оси x , получим с помощью метода аддитивной факторизации уравнение приближения однонаправленного распространения с пренебрежением отличием коэффициента прохождения от единичного:

$$D_x p_1^+ - i\omega S(x) p_1^+ = 0,$$

$$S = (C^2 - \rho D_y ((i\omega)^2 \rho)^{-1} D_y - \rho D_z ((i\omega)^2 \rho)^{-1} D_z)^{1/2}$$

и используем для его решения алгоритм (10)

$$E \cong \prod_k (I - 2\text{Im}(\mu_k) \times (C^2 - \rho D_y ((i\omega)^2 \rho)^{-1} D_y - \rho D_z ((i\omega)^2 \rho)^{-1} D_z - \mu_k)^{-1}). \quad (12)$$

Из (12) видно, что для вычисления поля акустического давления на каждом шаге по оси x нам необходимо решить несколько двумерных краевых

задач, аналогичных по виду краевой задаче двумерной акустики, но с большим поглощением, так как все $\text{Im}\mu_k < 0$:

$$\begin{vmatrix} D_y & 0 & -i\omega\rho \\ D_z & -i\omega\rho & 0 \\ -i\omega\rho^{-1}(C^2 - \mu_k) & D_z & D_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ v_z \\ v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x \\ f_z \\ V \end{vmatrix},$$

$$Y_0 p(y, 0) + v_z(y, 0) = 0, \quad Y_H p(y, H) + v_z(y, H) = 0.$$

Если скорость изменения свойств среды вдоль оси y также невелика, то это целесообразно сделать с применением итерационного процесса, описывающего распространение волн обоих направлений, в форме (11).

Итак, применение метода аддитивной факторизации и аппарата дробно-рациональных аппроксимаций Падэ к проблеме оценки гармонических звуковых полей в двумерно- и трехмернонеоднородных моделях океана позволило получить приемлемые по точности и производительности алгоритмы, и отчасти, программы решения поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1989.
2. Боровиков В.А., Попов А.В. Распространение волн в плавнерегулярных волноводах // Прямые и обратные задачи теории дифракции. М.: ИРЭ, 1979.
3. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
4. Авилов К.В., Мальцев Н.Е. К вычислению звуковых полей в океане методом параболического уравнения // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 3. С. 335 - 340.
5. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
6. Авилов К.В. Вычисление гармонических звуковых полей в океане в уточненном широкоугольном параболическом приближении // Судостроительная пром-сть. Сер. Акустика. 1989. № 4. С. 9 - 15.
7. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
8. Авилов К.В. Приближение однонаправленного распространения в вычислении звуковых полей в океане // Акустика океанской среды. / Под. ред. Бреховских Л.М., Андреевой И.Б. М.: Наука, 1989. С. 10 - 19.
9. Авилов К.В. Вычисление гармонических звуковых полей в волноводах в уточненном широкоугольном параболическом приближении // Волны и дифракция-95, IX Всес. симп. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: ТГУ, 1985. Т. 2. С. 236 - 239.
10. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

