

УДК 534.2

## ВНУТРЕННЯЯ КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН

© 1995 г. К. Б. Власов, А. Б. Ринкевич

Институт физики металлов УО РАН

620219 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18

Поступила в редакцию 31.01.94 г.

Рассмотрено влияние магнитной поляризации на явление внутренней конической рефракции упругих волн. Получено выражение для потока энергии с учетом комплексных динамических модулей упругости в магнитном поле. Показано, что в кубическом кристалле, намагниченном вдоль оси третьего порядка, конус рефракции эллиптический, причем эллипсы для волн правой и левой круговых поляризаций различны для волн, распространяющихся вдоль этой же оси. Проведен анализ влияния симметричных и антисимметричных вкладов в модули на угол раствора конуса рефракции и полуоси его основания.

Явление внутренней конической рефракции упругих волн заключается в следующем. Пусть волновая нормаль совпадает с продольной акустической осью кристалла (волновой вектор  $\mathbf{q}$  направлен вдоль акустической оси). Тогда образуется конус направлений вектора плотности потока упругой энергии  $\mathbf{P}$ , каждое из которых отвечает определенному вектору смещения  $\mathbf{u}$  поперечной волны. Теоретическому и экспериментальному изучению этого явления посвящены работы [1 - 4].

В частном случае для волн круговой поляризации, распространяющихся вдоль осей третьего порядка [111] кубического кристалла, коническая рефракция рассмотрена в [3]. В этом случае конус направлений вектора потока энергии круговой. В кристаллах более низкой симметрии этот конус эллиптический.

В [5] рассмотрена возможность появления внутренней конической рефракции (ВКР) в кубическом кристалле, если волна распространяется вдоль оси четвертого порядка, а магнитное поле приложено перпендикулярно этому направлению. В настоящей работе выясняется влияние магнитной поляризации на явление ВКР. Подробно рассмотрен случай кубического кристалла, намагниченного вдоль оси симметрии третьего порядка.

Магнитная поляризация какой-либо среды понижает ее симметрию и делает эту среду гиротропной. Число независимых компонент динамического тензора модуля упругости  $c_{ij}$ , их вид (симметричный, антисимметричный) от магнитной индукции  $\mathbf{B}$  можно определить из соображений симметрии кристаллической решетки и магнитного поля, а также на основании метода неравновесной термодинамики. Согласно последней, должны выполняться соотношения Онсагера

$$c_{ij}(\mathbf{B}) = c_{ij}(-\mathbf{B}), \quad (1)$$

где индексы  $i, j$  пробегает значения от 1 до 6.

В кубическом кристалле, намагниченном вдоль оси третьего порядка, тензор динамического модуля упругости (термин динамический для сокращения будем далее опускать) имеет следующие свойства симметрии. Он должен быть инвариантен, во-первых, относительно операции  $L^{(3)}$  и, во-вторых, операции  $RL^{(2)}$ , где  $L^{(3)}$  и  $L^{(2)}$  – повороты соответственно вокруг оси третьего порядка [111] на  $120^\circ$  и вокруг оси второго порядка  $[11\bar{2}]$  на  $180^\circ$ .  $R$  – оператор изменения знака времени и магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Операция  $RL^{(2)}$  совместно с соотношениями Онсагера (1) позволяет определить: 1) характер зависимости компонент тензора модуля упругости от  $B$ , а также выяснить, какие из компонент симметричны, а какие, появляющиеся при  $B \neq 0$ , антисимметричны. Выбирая систему координат, ось  $x_3$  которой направлена вдоль [111], а ось  $x_1$  направлена вдоль  $[11\bar{2}]$ , и учтя изложенное выше, получим, что тензор  $c_{ij}$  имеет следующую блочную структуру:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} A & G \\ -G & D \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} \end{pmatrix},$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} -c_{25} & c_{16} \\ c_{25} & -c_{16} \\ 0 & 0 \\ c_{45} & -c_{25} \end{pmatrix},$$

$$D_{ij} = D_{ji} = \begin{pmatrix} c_{44} & c_{14} \\ c_{14} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}).$$

Компоненты, входящие в блоки  $A$  и  $D$ , симметричны относительно перестановки индексов, они являются четными функциями  $B$ , отличны от нуля и при  $B = 0$ . Однако при  $B = 0$  число независимых компонент в матрицах, входящих в блоки  $A$  и  $D$ , уменьшается с шести компонент до трех. В этом случае компоненты  $c_{ij}$ , записанные в выбранной системе координат, выражаются через компоненты тензора модуля упругости  $\lambda_{ij}$  в кристаллографической системе координат, следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{66}), \\ c_{12} &= \frac{1}{6}(\lambda_{11} + 5\lambda_{12} - 2\lambda_{66}), \\ c_{13} &= \frac{1}{3}[\lambda_{11} + 2(\lambda_{12} - \lambda_{66})], \\ c_{33} &= \frac{1}{3}[\lambda_{11} + 2(\lambda_{12} + 2\lambda_{66})], \\ c_{44} &= \frac{1}{3}(\lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{66}), \\ c_{14} &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{66}). \end{aligned} \quad (3)$$

В изотропной среде  $\lambda_{66} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2$ ,  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda_{11}$ ,  $c_{12} = \lambda_{12}$ ,  $c_{44} = \lambda_{66}$ ,  $c_{14} = 0$ .

Заметим, что при электрической поляризации среды вид матриц  $A$  и  $D$ , а также характер зависимости их компонент от вектора электрической индукции такой же, как и в случае магнитной поляризации. Однако компоненты матрицы  $G$  равны нулю.

Компоненты, входящие в матрицу  $G$ , обусловлены магнитной гиротропией среды. Они антисимметричны относительно перестановки индексов  $i$  и  $j$ , являются нечетными функциями  $B$  и равны нулю при  $B = 0$ . Эти компоненты обычно невелики, однако могут достигать относительно больших значений при частотах и напряженностях поляризуемого магнитного поля, когда возникают различные резонансы. В металлах — это доплер-свинутый, а также геликон- и доплерон-фононные резонансы в сильном магнитном поле, в магнетиках — магнитоупругие резонансы.

Динамический тензор модуля упругости в общем случае комплексный  $c_{ij} = c'_{ij} + ic''_{ij}$ . В пренебрежении поглощением он должен быть эрмитовым:  $c_{ij} = c_{ji}^*$ . В этом случае, который в дальнейшем и будет рассматриваться, симметричные компоненты, входящие в блоки  $A$  и  $D$ , должны быть действительными, а антисимметричные, входящие в блок  $G$ , — мнимыми.

Для нахождения упругих мод необходимо решить совместно систему уравнений теории упругости

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

и материальных уравнений

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (5)$$

В (5) модули упругости  $c_{ijkl}$  записаны в четырехиндексной записи. Здесь введены упругие напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\epsilon_{kl} = (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2$ ;  $\rho$  — плотность среды. При распространении плоских упругих волн  $u = u_0 e^{i\varphi}$ ,  $\varphi = qx_3 - \omega t$  вдоль оси третьего порядка уравнения (4), (5) с учетом вида тензора модулей (2) превращаются в систему уравнений для  $u_1, u_2$

$$\rho \omega^2 u_1 = q^2 c'_{44} u_1 - iq^2 c''_{45} u_2, \quad (6)$$

$$\rho \omega^2 u_2 = iq^2 c''_{45} u_1 + q^2 c'_{44} u_2$$

и уравнение для  $u_3$

$$\rho \omega^2 u_3 = q^2 c_{33} u_3. \quad (7)$$

Уравнение (7) описывает продольную волну. Его решение имеет вид

$$u_3 = u_3^0 e^{i\varphi}, \quad \varphi = q' x_3 - \omega t, \quad (8)$$

$$(q')^2 = \rho \omega^2 / c_{33}.$$

Уравнения (6) в циркулярных переменных  $u^\pm = u_1 \pm iu_2$  имеют решения

$$u^\pm = u_0^\pm e^{i\varphi^\pm}, \quad \varphi^\pm = q^\pm x_3 - \omega t, \quad (9)$$

где

$$(q^\pm)^2 = \rho \omega^2 / (c'_{44} \pm ic''_{45}). \quad (10)$$

Отношение  $u_2/u_1$  оказывается равным

$$\left( \frac{u_2}{u_1} \right)^\pm = \mp i. \quad (11)$$

Как видно из (9), (11), решением уравнений (6) будут две циркулярно поляризованные волны с правой (+) и левой (-) круговыми поляризациями; их направления вращения противоположны.

Величина  $c''_{45}$ , вносящая различие в  $q^+$  и  $q^-$ , определяет собой вращение плоскости поляризации упругих волн. Заметим, что хотя тензор  $c_{ij}$  комплексный, волновые векторы  $q^\pm$  действительны.

Вектор плотности потока упругой энергии определяется соотношением

$$P_i = -\text{Re} \sigma_{ij} \text{Re} \dot{u}_j. \quad (12)$$

Вычислим его для случая эллиптически поляризованных волн, распространяющихся в магнитно

поляризованной среде. В пренебрежении поглощением вектор  $\mathbf{u}^0$  можно записать в комплексном виде

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}' + i\mathbf{u}'' \quad (13)$$

Согласно (12) с учетом (5) и (13), получим соотношение

$$P_i = \omega q_i \left\{ c'_{ijkl} \left[ u'_j u'_k \sin^2 \varphi + u''_j u''_k \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (u''_j u'_k + u'_j u''_k) \sin 2\varphi \right] + c''_{ijkl} \left[ u''_j u'_k \cos^2 \varphi - u'_j u''_k \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (u'_j u'_k - u''_j u''_k) \sin 2\varphi \right] \right\}, \quad (14)$$

которое переходит в выражение, приведенное в [6], для магнитно негиротропной среды, когда модуль упругости вещественен ( $c''_{ijkl} = 0$ ).

В рассматриваемом нами случае векторы  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}''$  волн (+) и (-) поляризаций имеют вид

$$(\mathbf{u}^\pm)' = (u^\pm, 0, 0); (\mathbf{u}^\pm)'' = (0, \mp u^\pm, 0).$$

В соответствии с этим, согласно (14), учтя вид тензора модулей упругости (2), получим для вектора плотности потока энергии циркулярно поляризованных волн

$$\begin{aligned} P_1^\pm &= \mp \omega q^\pm c'_{14} \sin 2\varphi (u^\pm)^2, \\ P_2^\pm &= -\omega q^\pm (c'_{14} \pm c''_{25}) \cos 2\varphi (u^\pm)^2, \\ P_3^\pm &= \omega q^\pm (c'_{44} \pm c''_{45}) (u^\pm)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

При изменении  $\varphi$ , например с течением времени  $t$ , векторы  $\mathbf{P}^+$  и  $\mathbf{P}^-$  вращаются с удвоенной частотой в противоположных направлениях вокруг оси третьего порядка, описывая конические поверхности. Концы этих векторов описывают эллипсы в плоскости, перпендикулярной осям конусов. Высоты конусов, согласно (15), (10), определяются соотношениями

$$h^\pm(\mathbf{B}) = \frac{P_3^\pm}{(u^\pm)^2} = \omega^2 [\rho (c'_{44} \pm c''_{45})]^{1/2}, \quad (16)$$

а полуоси эллипсов  $a^\pm$  и  $b^\pm$

$$a^\pm(\mathbf{B}) = \frac{P_1^\pm}{(u^\pm)^2} = \frac{c'_{14}}{c'_{44} \pm c''_{45}} h^\pm(\mathbf{B}), \quad (17)$$

$$b^\pm(\mathbf{B}) = \frac{P_2^\pm}{(u^\pm)^2} = \frac{c'_{14} \pm c''_{25}}{c'_{44} \pm c''_{45}} h^\pm(\mathbf{B}).$$

Отношения  $|a^\pm/h^\pm|$  и  $|b^\pm/h^\pm|$  определяют углы раствора конуса  $\psi_{1,2}$  в плоскостях  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$ :

$$\psi_1 = \arctg|a^\pm/h^\pm|, \quad \psi_2 = \arctg|b^\pm/h^\pm|. \quad (18)$$

При отсутствии магнитной поляризации, что рассмотрено в [3], имеем, учтя (3),

$$\begin{aligned} c''_{45}(0) &= 0, \quad c''_{25}(0) = 0, \\ c'_{44}(0) &= \frac{1}{3} (\lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{66}), \\ c'_{14}(0) &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{66}). \end{aligned}$$

Высоты конусов для "+" и "-" волн становятся одинаковыми

$$h^\pm(0) = h = \omega^2 (\rho c'_{44}(0))^{1/2}, \quad (19)$$

а эллипсы вырождаются в окружности одинакового радиуса

$$a^\pm(0) = b^\pm(0) = r = \frac{c'_{14}(0)}{c'_{44}(0)} h. \quad (20)$$

Угол раствора конуса принимает известный вид [1]

$$\psi(0) = \arctg \frac{c'_{14}(0)}{c'_{44}(0)} = \arctg \frac{\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{66}}{\sqrt{2} (\lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{66})}. \quad (21)$$

Таким образом, для кристаллов кубической симметрии при распространении волн вдоль оси третьего порядка конусы рефракции для волн "+" и "-" круговые и одинаковых размеров.

Если среда изотропна, то  $\lambda_{66} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2$ ,  $c'_{14}(0) = 0$  и явление ВКР отсутствует.

В результате магнитной поляризации кристалла компоненты тензора  $c'_{44}$  и  $c'_{14}$  получают четные по  $\mathbf{B}$  добавки

$$c'_{44}(\mathbf{B}) \equiv c'_{44} = c'_{44}(0) + \Delta c'_{44}(\mathbf{B}),$$

$$c'_{14}(\mathbf{B}) \equiv c'_{14} = c'_{14}(0) + \Delta c'_{14}(\mathbf{B}),$$

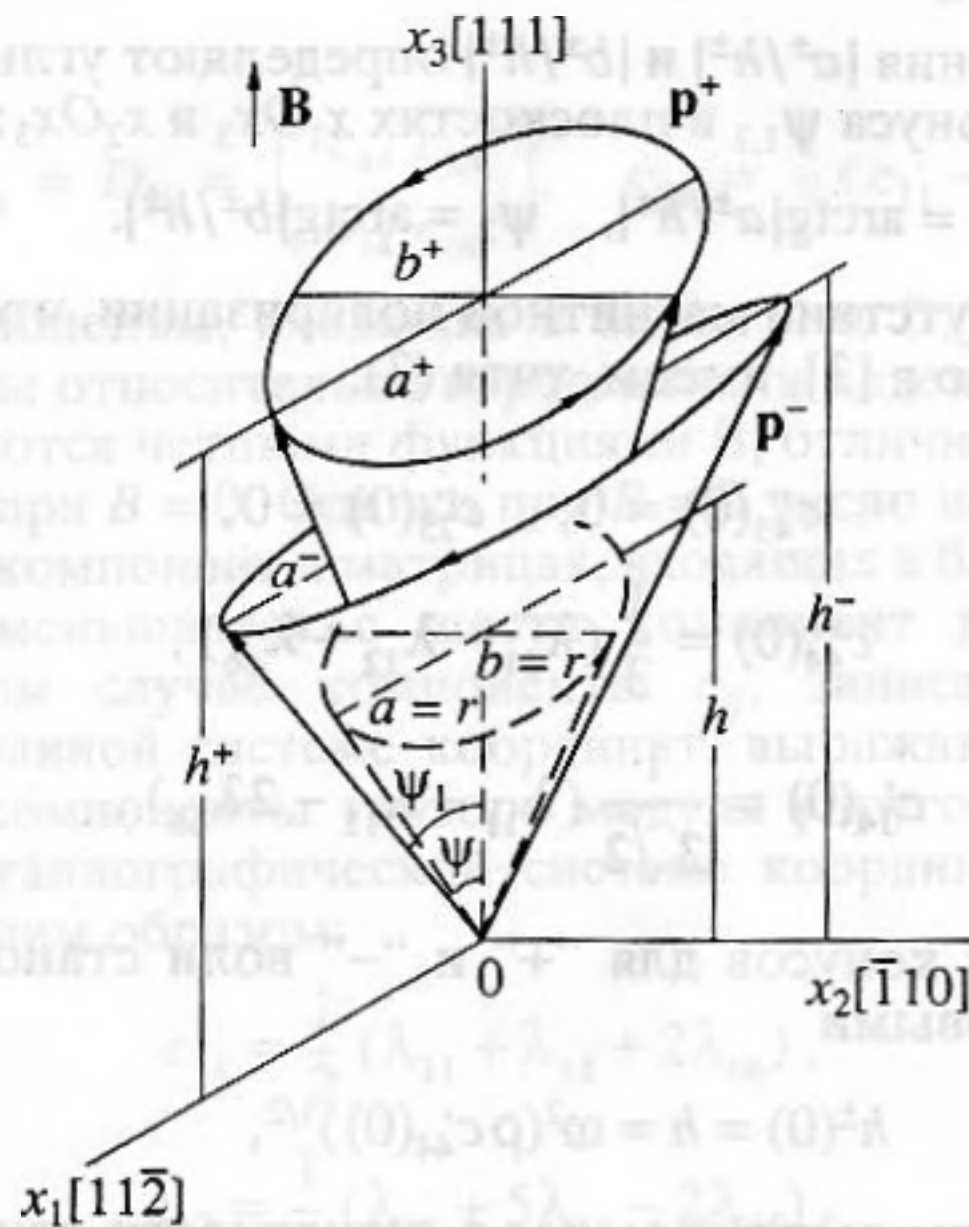
и возникают новые компоненты, обусловленные гиротропией среды  $c''_{45}$  и  $c''_{25}$ . Мы полагаем

$$|\Delta c'_{44}| \ll c'_{44}(0), \quad |c''_{45}| \ll c'_{44}(0).$$

Высоты конусов ВКР для "+" и "-" волн (16) можно записать в виде

$$h^\pm = h \left( 1 + \frac{\Delta h}{h} \pm \frac{\Delta h^g}{h} \right), \quad (22)$$

где добавки  $\Delta h/h = \frac{1}{2} \Delta c'_{44}/c'_{44}(0)$  одинаковы для



Схематическое изображение эллиптических конусов рефракции волн правой и левой круговой поляризации в намагниченном кубическом кристалле. Пунктирная линия – круговой конус рефракции в ненамагниченном кристалле.

обеих волн, а величина  $\Delta h^g/h = \frac{1}{2} c_{45}''/c_{44}(0)$  входит в выражение (22) с разным знаком для обеих волн. Различие  $h^+$  и  $h^-$ , зависящее от  $c_{45}''$ , в соответствии с (10), связано с различными значениями фазовых скоростей, а следовательно, и с явлением вращения плоскости поляризации упругих волн.

В изотропных средах как  $\Delta c'_{44}$ , так и  $c_{45}''$  отличны от нуля. Следовательно, и для них магнитная поляризация приведет к изменению величин  $h^\pm$  по сравнению с  $h$ . Из-за наличия компоненты  $c_{45}''$ , обусловленной гиротропией, эти изменения для  $h^+$  и  $h^-$  различны. Поэтому в изотропных средах возможно явление вращения плоскости поляризации упругих волн, возникающее в результате их магнитной поляризации.

В большинстве случаев, за исключением сред, близких к изотропным,  $|\Delta c'_{14}| \ll c'_{14}(0)$ . В этих случаях полуоси эллипсов  $a^\pm$  и  $b^\pm$  равны

$$a^\pm = r \left( 1 + \frac{\Delta r}{r} \mp \frac{\Delta r_1^g}{r} \right), \quad (23)$$

$$b^\pm = r \left( 1 + \frac{\Delta r}{r} \mp \frac{\Delta r_1^g + \Delta r_2^g}{r} \right),$$

а их отношение  $(b/a)^\pm$  равно

$$\left( \frac{b}{a} \right)^\pm = 1 \mp \frac{\Delta r_2^g}{r}, \quad (24)$$

где

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta c'_{14}}{c'_{14}(0)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta c'_{44}}{c'_{44}(0)}, \quad (25)$$

$$\frac{\Delta r_1^g}{r} = \frac{1}{2} \frac{c_{45}''}{c'_{44}(0)}, \quad \frac{\Delta r_2^g}{r} = -\frac{c_{25}''}{c'_{14}(0)}.$$

На рисунке схематически изображены конусы ВКР волн с “+” и “-” поляризацией для распространения упругой волны вдоль оси кристалла третьего порядка в размагниченном (пунктирная линия) и в намагниченном состояниях. Для определенности полагалось  $c_{45}'' > 0$ ,  $c_{25}'' < 0$ ,  $\Delta c'_{14}/c'_{14}(0) > \frac{1}{2} \Delta c'_{44}/c'_{44}(0)$ . Из (22) - (25) следует, что в результате магнитной поляризации происходят следующие изменения формы и размеров конуса рефракции, бывшего круговым без поляризации: изменение высоты конуса, различное для волн “+” и “-” поляризации; окружности, описываемые концами векторов  $P^+$  и  $P^-$ , деформируются в эллипсы, и отличие эллипса от окружности, согласно (24) и (25), возрастает по мере увеличения отношения  $c_{25}''/c'_{14}(0)$ ; углы раствора конусов изменяются в магнитном поле, в соответствии с (17), (18); с изменением знака  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ ) происходит смена знака угла поворота плоскости поляризации и смена полуосей эллипса.

Если в кристалле  $c'_{14}(0) = 0$ , то без магнитного поля конической рефракции нет,  $P_1^\pm = P_2^\pm = 0$ . В поле рефракция может возникнуть как за счет того, что  $\Delta c'_{14}(\mathbf{B}) \neq 0$ , так и за счет появления компоненты  $c_{25}''(\mathbf{B})$ . При этом, когда  $\Delta c'_{14} \gg c_{25}''$ , конус будет близок к круговому, а при  $\Delta c'_{14} \ll c_{25}''$  он приближается к плоскому сектору с высотой  $2 \frac{c_{25}''}{c'_{44}(0)} h$ , ориентированному вдоль оси второго порядка  $[11\bar{2}]$ .

Заметим, что кристаллы, в которых квазистатическая компонента  $c'_{14}(0)$  равна нулю, согласно (9), в упругом отношении изотропны. Поэтому в результате магнитной поляризации на первый взгляд в них не должна возникать добавка  $\Delta c'_{14}$  и компонента  $c_{25}''$ . Однако в металлах в области частот и напряженностей магнитного поля, при которых существенно пространственная дисперсия, должна проявляться симметрия поверхности Ферми электронов проводимости. Поэтому  $\Delta c'_{14}$  и  $c_{25}''$  в этой области могут оказаться отличными от нуля.

Оценка влияния магнитной поляризации на ВКР была сделана в [1], основываясь на формуле (21)

и имея в виду различие модулей  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{66}$  в нулевом и сильном магнитных полях. Возможность появления антисимметричных компонент  $c_{25}''$ ,  $c_{45}''$  в [1] не предполагалась. Для монокристалла никеля изменение угла ВКР оценено в  $0.5^\circ$ . В [5] использована связь между явлением вращения плоскости поляризации и конической рефракции. Ожидается, что в кристалле железо-иттриевого граната отклонение вектора потока мощности составляет около  $1^\circ$ .

Столь небольшие изменения угла ВКР затруднительно измерить непосредственно. В [7] выполнены эксперименты в молибдене в условиях доплер-сдвинутого акустического циклотронного резонанса. Обнаружено искривление волнового фронта, резонансным образом зависящее от напряженности магнитного поля. Полученные результаты интерпретируются в [7] совместным действием дифракции и внутренней конической рефракции. Эта интерпретация основана на отмеченных в [2] особенностях явления ВКР в пучках волн: резком увеличении поперечного сечения пучка с пройденным расстоянием и перераспределением энергии колебаний по сечению пучка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Klerk J., Musgrave M.J.P.* Internal conical refraction of transverse elastic waves in a cubic crystal // *Proc. Phys. Soc.* 1955. V. 68. № 422B. P. 81 - 88.
2. *Waterman P.C.* Orientation dependence of elastic waves in single crystals // *Phys. Rev.* 1959. V. 113. № 5. P. 1240 - 1253.
3. *Хаткевич А. Г.* К явлению внутренней конической рефракции упругих волн // *Кристаллография.* 1962. Т. 7. № 6. С. 916 - 921.
4. *Александров К.С., Рыжова Т.В.* Внутренняя коническая рефракция упругих волн в дигидрофосфате аммония // *Кристаллография.* 1994. Т. 9. № 3. С. 373 - 376.
5. *Филиппов В.В.* О потоке энергии упругих волн в магнитном поле // *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1978. № 1. С. 109 - 112.
6. *Федоров Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1964. 386 с.
7. *Власов К.Б., Ринкевич А.Б.* Внутренняя коническая рефракция ультразвука в вольфраме и молибдене в магнитном поле // *Тез. докл. XI Всес. акуст. конф.* М.: Наука, 1991.

## Internal Conical Refraction of Elastic Waves in Magnetically Polarized Media

K. B. Vlasov and A. B. Rinkevich

The effect of magnetic polarization on the internal conical refraction of elastic waves is studied. An expression is obtained for the energy flux with allowance made for the complex dynamic elastic moduli in a magnetic field. It is shown that, in a cubic crystal magnetized along the threefold axis, the refraction cone is elliptic, with different ellipses for the right and left circularly polarized waves propagating along this axis. The apex angle of the cone of refraction and the semi axes of its base were considered in relation to the symmetric and antisymmetric contributions to the elastic moduli.