

УДК 534.22+537.876.23

ХАОТИЧЕСКАЯ ФОКУСИРОВКА ЛУЧЕВЫХ ТРУБОК В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 1995 г. Е. З. Грибова, А. И. Саичев

Нижегородская государственная архитектурно-строительная академия
603600 Н. Новгород, ул. Ильинская, 65

Поступила в редакцию 01.02 94 г.

На основе численно-аналитического изучения динамических и статистических свойств расходимости лучевой трубки в случайно-неоднородной среде исследуется статистика экспериментально наблюдаемых параметров волны – интенсивности и среднего числа лучей. Анализ вероятностных свойств и поведения реализаций интенсивности в области каустик и развитой многолучевости показывает, что бесконечные каустические выбросы интенсивности концентрируются во все более узких интервалах продольной оси – происходит уменьшение потока энергии вдоль фиксированного луча, компенсирующееся экспоненциально нарастающей многолучевостью.

Распространение акустических волн в случайной среде, в частности, в океане, сопровождается хаотической фокусировкой лучей, вызванной неоднородностями с размерами больше длины волны. В результате этого формируются каустические особенности в поле волны, и распространение становится многолучевым [1]. Исследованию различных физических свойств волн, проявляющихся в этом случае, посвящено огромное количество работ (см., например, [1] и библиографию в ней, а также работы [2 - 6]).

В данной работе численно-аналитическими методами изучаются важные параметры многолучевых полей: закон нарастания среднего числа лучей, поведение реализаций интенсивности волны и вероятностные свойства интенсивности в окрестностях каустик. Для этого удобно сначала изучить динамические и статистические свойства важного параметра волны в случайной среде – якобиана преобразования J эйлеровых (фиксированных) координат геометроакустического луча в лагранжевы (лучевые) координаты. Физический смысл этой величины – расходимость лучевой трубки, так как она равна отношению сечения лучевой трубки в среде к начальному сечению [1].

Отметим причины, по которым важно знать расходимость J . Во-первых, по знаку J можно судить о характере распространения: если J – знакопеременная функция координат, то распространение в плоскости, перпендикулярной оси распространения, является многолучевым. Точки, где J обращается в нуль, соответствуют каустикам. Во-вторых, изменение поля расходимости связано с изменением интенсивности волны: из закона сохранения потока энергии следует, что

интенсивность обратно пропорциональна модулю расходимости. Кроме того, можно показать [5, 7], что эйлерово среднее число приходящих в данную точку лучей первоначально плоской волны равно среднему лагранжеву модуля расходимости.

Из сказанного следует, что для анализа статистики многолучевого распространения волн необходимо прежде всего знать статистические свойства расходимости. Здесь мы исследуем статистику расходимости и связанных с ней величин, ограничившись для простоты двумерным случаем, приближенно моделирующим распространение гидроакустической волны в океане (волна распространяется вдоль оси t , единственная поперечная координата – x).

Расходимость лучевой трубки удовлетворяет в этом случае системе уравнений [3]:

$$\frac{dJ}{dt} = U, \quad \frac{dU}{dt} = \alpha(t, x)J, \quad (1)$$

где U – кривизна волнового фронта, домноженная на J , а случайная функция $\alpha(t, x)$ учитывает случайные флуктуации скорости волны в среде. В дальнейшем не будем рассматривать зависимости α от поперечной координаты, поэтому аргумент x опустим. Будем считать $\alpha(t)$ гауссовым дельта-коррелированным процессом с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle \alpha(t)\alpha(t+\tau) \rangle = 2\delta(\tau).$$

Обсудим сначала распространение сферической волны. В этом случае начальные условия к уравнениям (1) имеют вид:

$$J(t=0) = 0, \quad U(t=0) = 1. \quad (2)$$

Точки каустик волны t_k , где $k = 0, 1, 2, \dots$ являются корнями уравнения

$$J(t) = 0.$$

Взяв одну из таких точек (t_n) в качестве начальной, представим поля $J(t)$, $U(t)$ при $t > t_n$ в виде

$$J(t) = U(t_n)J(t|t_n), \quad U(t) = U(t_n)U(t|t_n). \quad (3)$$

Здесь $J(t|t_n)$ и $U(t|t_n)$ – решения системы (1) с начальными условиями

$$J(t = t_n|t_n) = 0, \quad U(t = t_n|t_n) = 1.$$

Выражая $U(t_n)$ через $U(t_{n-1})$ и $U(t|t_{n-1})$ и т.д. до $n = 1$ и пользуясь тем, что $U(t_0) = 1$, перепишем (3) в следующем виде:

$$J(t) = J(t|t_n) \prod_{k=1}^n U_k(\tau_k), \quad (4)$$

$$U(t) = U(t|t_n) \prod_{k=1}^n U_k(\tau_k),$$

где $U_k(\tau_k) = U(t_k|t_{k-1})$, а τ_k – расстояние между соседними каустиками: $\tau_k = t_k - t_{k-1}$.

Отметим следующие из (4) важные свойства полей $J(t)$, $U(t)$. Во-первых, поскольку сомножители в правой части (4) зависят от дельта-коррелированного гауссова процесса $\alpha(t)$ на неперекрывающихся интервалах (t_{k-1}, t_k) , то они статистически взаимно независимы. Во-вторых, поля $J(t)$, $U(t)$ представляют собой квазипериодический процесс со случайными “полупериодами” τ_k [3], поэтому все $U_k(\tau_k)$ отрицательны, и их можно представить в виде

$$U_k(\tau_k) = -\exp[\chi_k(\tau_k)],$$

а знакопеременную последовательность $U_n = \prod_{k=1}^n U_k(\tau_k)$ записать как

$$U_n = (-1)^n \exp\left[\sum_{k=1}^n \chi_k(\tau_k)\right] = (-1)^n \exp(\xi_n), \quad (5)$$

где введена последовательность случайного блуждания [8]:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^n \chi_k(\tau_k).$$

Таким образом, статистика поля расходимости и связанных с расходимостью характеристик волны (интенсивности, среднего числа лучей и т.д.) в значительной мере определяется статистическими свойствами случайных величин $\chi_k(\tau_k)$. Покажем,

например, как связано поведение реализаций интенсивности $I(t)$ со средним значением $\langle \chi_k \rangle$.

Считая известными $\langle \chi_k \rangle$ и дисперсию $\sigma_\chi^2 = \langle \chi_k^2 \rangle - \langle \chi_k \rangle^2$, представим последовательность ξ_n в виде:

$$\xi_n = n\langle \chi_k \rangle + \eta_n, \quad (6)$$

где η_n – центрированное случайное блуждание с дисперсией $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = n\sigma_\chi^2$. Тогда модуль последовательности $|U_n|$ равен

$$|U_n| = \exp[n\langle \chi_k \rangle + \eta_n]. \quad (7)$$

Из (6), (7) видно, что свойства последовательностей ξ_n и $|U_n|$ аналогичны свойствам винеровского процесса со сносом и логарифмически-нормального процесса, равного экспоненте от процесса Винера [6]. Так, если $\langle \chi_k \rangle > 0$, то процесс ξ_n обладает регулярным сносом вверх от оси $\xi_n = 0$, а для последовательности $V_n \equiv 1/|U_n|$ существует спадающая мажорантная кривая – такая целочисленная убывающая функция $M(n, p)$, что при любой заданной вероятности $p < 1$ 100% реализаций V_n лежат ниже ее [6]. Сама же последовательность V_n , как видно из первого равенства (4), важна для анализа поведения интенсивности волны в окрестностях каустик.

Из выражения (7) видно, что для решения вопроса о существовании мажорантной кривой для V_n необходимо знать величину или хотя бы знак среднего $\langle \chi_k \rangle$. Наиболее очевидный способ нахождения $\langle \chi_k \rangle$ состоит в численном решении стохастических уравнений (1). При этом необходимо интегрировать систему (1) до очень больших расстояний t , чтобы “пройти” достаточное для статистического анализа число каустик. Это требует огромных возможностей памяти ЭВМ и практически едва ли осуществимо. Мы же пользуемся здесь комбинированными численно-аналитическими методами, возможными потому, что все τ_k имеют одинаковые вероятностные распределения [3], и поля $J(t)$, $U(t)$ являются квазипериодическими. Это позволяет изучать их вероятностные свойства и получать асимптотические зависимости на больших расстояниях t , решая уравнения только на одном “полупериоде” $0 \leq t \leq t_1$ (t_1 – точка первой каустики).

С учетом квазипериодичности $J(t)$, $U(t)$ целесообразно воспользоваться более удобными для численного решения уравнениями. Для этого представим функции $J(t)$, $U(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(t) &= \exp[\chi(t)] \sin \varphi(t), \\ U(t) &= \exp[\chi(t)] \cos \varphi(t) \end{aligned} \quad (8)$$

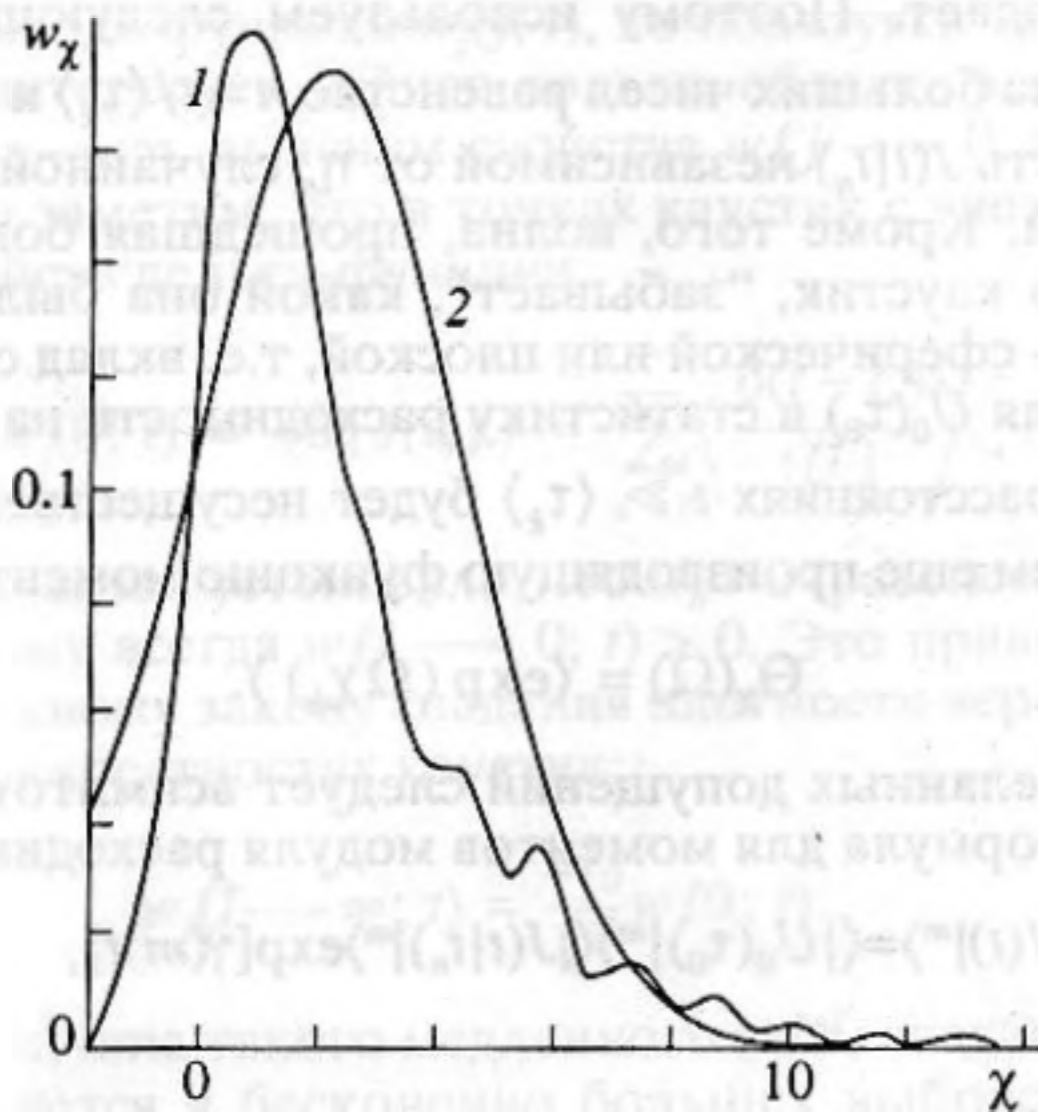


Рис. 1. Плотность вероятностей $w_\chi(\chi)$ при $\langle \chi_k \rangle = 2.18$, $\sigma_\chi^2 = 4.90$: 1 – результат численного решения системы (8), 2 – гауссова плотность вероятностей.

и перейдем от системы (1) к уравнениям для $\varphi(t)$, $\chi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \cos^2 \varphi - \alpha(t) \sin^2 \varphi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2} [1 + \alpha(t)] \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Видно, что система уравнений (8) удобнее, чем (1), поскольку первое из уравнений (8) вообще не зависит от χ . Это значит, что необходимо решать только одно уравнение – для $\varphi(t)$, а $\chi(t)$ находится из второго численным интегрированием. Точкам каустик соответствуют теперь значения $\varphi_k = \pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

N -кратное ($N \gg 1$) решение системы (8) дает выборку реализаций расстояний до первой каустики $\{t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ и выборку значений χ в точке первой каустики $\{\chi_i(t_i)\}$. По ним мы определим статистические свойства величин τ_k и χ_k . Заметим, что статистика τ_k уже исследована в [3], а здесь мы используем ее для контроля точности наших результатов. В частности, при $N = 1500$ получаем средние $\langle \tau_k \rangle = 6.60$, $\langle \chi_k \rangle = 2.18$ и дисперсию $\sigma_\chi^2 = 4.90$. По найденным значениям $\chi(t_1)$ на рис. 1 построена плотность вероятностей $w_\chi(\chi)$. Здесь же для сравнения приведена гауссова плотность вероятностей, рассчитанная по уравнению

$w_r(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\chi^2}} \exp\left[-\frac{(\chi - \langle \chi_k \rangle)^2}{2\sigma_\chi^2}\right]$. На рис. 2 построена плотность вероятностей $w_\tau(t)$, получен-

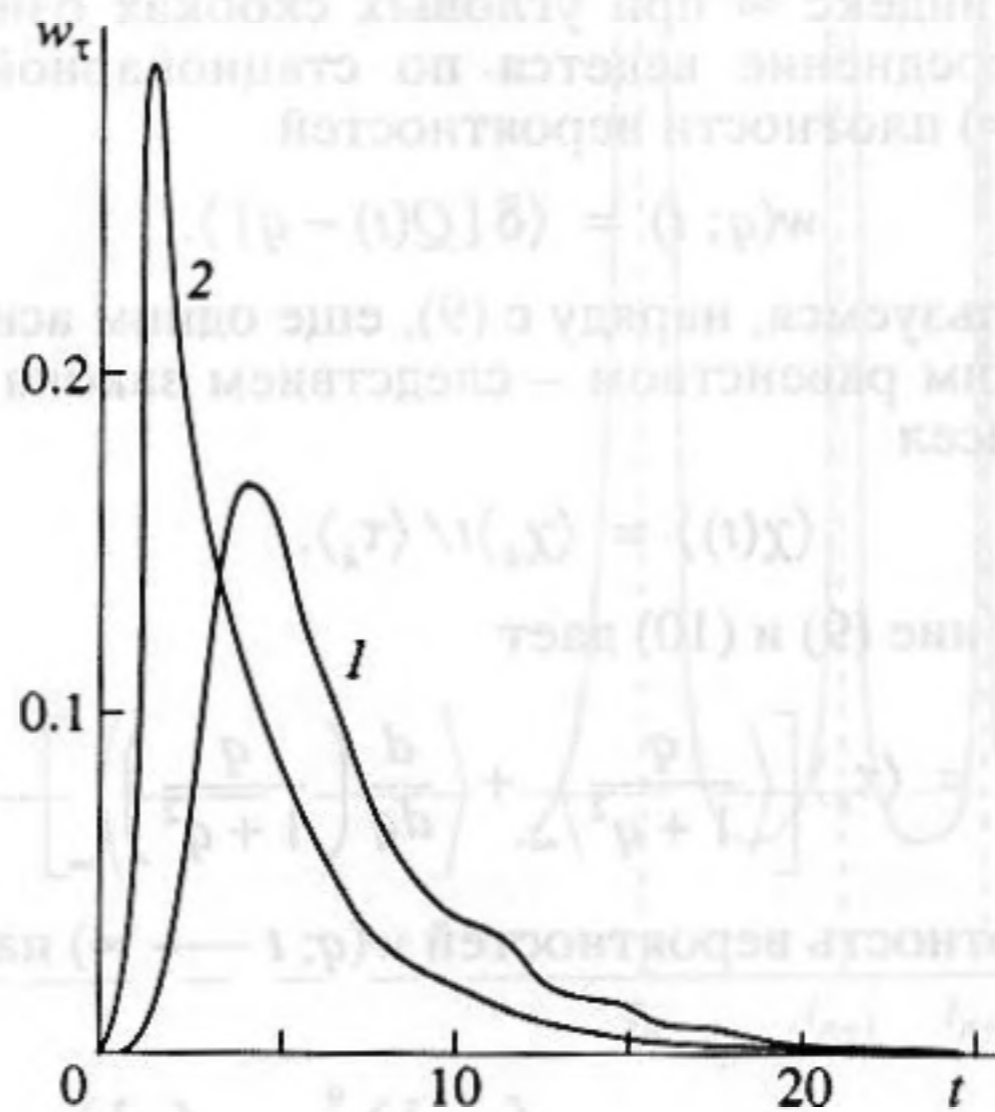


Рис. 2. Плотность вероятностей $w_\tau(t)$: 1 – результат численного решения системы (8), 2 – асимптотическая зависимость [3].

ная численным дифференцированием интегральной функции распределения $F(t) = M(t)/N$, где $M(t)$ – число реализаций, не оборванных до точки t (т.е. тех, у которых вплоть до t выполнялось условие $\varphi < \pi$). Видно, что наши результаты хорошо согласуются с асимптотическим результатом для больших расстояний, приведенным в [3] (сравнение с асимптотикой для малых расстояний невозможно [3], поскольку в численном эксперименте не было значений $t < 1.6$). Найденное среднее расстояние до первой каустики достаточно близко к аналитическому результату работы [3], где для сферической волны $\langle \tau_k \rangle = 6.269$. Однако, поскольку значение $\langle \chi_k \rangle$ найдено приближенными методами, а вопрос о величине и знаке $\langle \chi_k \rangle$ важен для оценки мажорантных свойств последовательности V_n , найдем $\langle \chi_k \rangle$ еще одним способом.

Введем вместо $\varphi(t)$ новую функцию $Q(t) = \text{ctg} \varphi(t)$ и из (8) получим систему стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + Q^2 &= \alpha(t), \\ \frac{d\chi}{dt} &= [1 + \alpha(t)] \frac{Q}{1 + Q^2}. \end{aligned}$$

Стандартная процедура получения эволюционных уравнений для средних значений [9] и переход к пределу $t \rightarrow \infty$ дают асимптотическую формулу

$$\langle \chi(t) \rangle_{t \rightarrow \infty} = \left[\left\langle \frac{q}{1+q^2} \right\rangle_\infty + \left\langle \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1+q^2} \right) \right\rangle_\infty \right] t. \quad (9)$$

Здесь индекс ∞ при угловых скобках означает, что усреднение ведется по стационарной (при $t \rightarrow \infty$) плотности вероятностей

$$w(q; t) = \langle \delta [Q(t) - q] \rangle.$$

Воспользуемся, наряду с (9), еще одним асимптотическим равенством – следствием закона больших чисел

$$\langle \chi(t) \rangle = \langle \chi_k \rangle t / \langle \tau_k \rangle. \quad (10)$$

Сравнение (9) и (10) дает

$$\langle \chi_k \rangle = \langle \tau_k \rangle \left[\left\langle \frac{q}{1+q^2} \right\rangle_{\infty} + \left\langle \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1+q^2} \right) \right\rangle_{\infty} \right]. \quad (11)$$

Плотность вероятностей $w(q; t \rightarrow \infty)$ найдена в [3]:

$$w(q; t \rightarrow \infty) = C \exp \left(-\frac{q^3}{3} \right) \int_{-\infty}^q \exp \left(\frac{z^3}{3} \right) dz, \quad (12)$$

где постоянная интегрирования C определяется условием нормировки $w(q; t)$ на единицу. Подставив в (11) значение $\langle \tau_k \rangle = 6.269$ из [3], и усредняя правую часть с помощью стационарной плотности вероятностей (12), вычислим: $\langle \chi_k \rangle = 2.45$, что достаточно хорошо согласуется со средним $\langle \chi_k \rangle$, найденным первым способом.

Используем теперь изученные свойства расходимости J и значения моментов $\langle \chi_k \rangle$ для анализа статистических свойств экспериментально наблюдаемых физических параметров – интенсивности и среднего числа лучей. При этом оказывается более удобным перейти к статистике первоначально плоской волны. Начальные условия в этом случае имеют вид

$$J(t=0) = 1, \quad U(t=0) = 0, \quad (2a)$$

а расходимость $J(t)$ на расстоянии t записывается аналогично (4):

$$J(t) = U_0(\tau_0) J(t|t_n) \prod_{k=1}^n U_k(\tau_k). \quad (4a)$$

Здесь дополнительный, по сравнению с (4), множитель $U_0(\tau_0)$ равен решению $U(t)$ задачи (1), (2a) в точке $t = t_0$, когда $J(t)$ первый раз обращается в нуль (т.е. в точке первой каустики первоначально плоской волны). С учетом (5), (6) модуль расходимости лучевой трубки запишем в виде:

$$|J(t)| = |U_0(\tau_0)| |J(t|t_n)| \exp(n \langle \chi_k \rangle + \eta_n). \quad (13)$$

Множитель $J(t|t_n)$ в равенстве (4a), а значит и в (13), строго говоря, зависит от всех остальных сомножителей. Но на больших расстояниях $t \gg \langle \tau_k \rangle$ эта статистическая зависимость асимптотически

пропадает. Поэтому используем следующее из закона больших чисел равенство $n = t / \langle \tau_k \rangle$ и будем считать $J(t|t_n)$ независимой от η_n случайной величиной. Кроме того, волна, прошедшая большое число каустик, “забывает”, какой она была при $t = 0$ – сферической или плоской, т.е. вклад сомножителя $U_0(\tau_0)$ в статистику расходимости на больших расстояниях $t \gg \langle \tau_k \rangle$ будет несущественным. Введем еще производящую функцию моментов χ_k :

$$\Theta_\chi(\Omega) = \langle \exp(\Omega \chi_k) \rangle.$$

Из сделанных допущений следует асимптотическая формула для моментов модуля расходимости

$$\langle |J(t)|^m \rangle = \langle |U_0(\tau_0)|^m \rangle \langle |J(t|t_n)|^m \rangle \exp[\gamma(m)t], \quad (14)$$

где

$$\gamma(m) = \langle \tau_k \rangle^{-1} \ln \Theta_\chi(m). \quad (15)$$

С помощью формулы (14) найдем закон нарастания эйлерова среднего числа N попадающих в данную точку лучей. Известно [5, 7], что оно равно лагранжеву среднему модулю расходимости

$$\langle N(t) \rangle = \langle |J(t)| \rangle$$

и, как найдено в [5], на больших расстояниях за фазовым экраном увеличивается линейно. В то же время (14) показывает, что в случайно-неоднородной среде $\langle N(t) \rangle$ нарастает экспоненциально:

$$\langle N(t) \rangle \sim \exp[\gamma(1)t]. \quad (16)$$

Приближенно считая распределение $w_\chi(\chi)$ гауссовым (рис. 1), оценим инкремент нарастания. В этом случае из (15) следует, что инкремент

$$\gamma(1) \approx \langle \tau_k \rangle^{-1} (\langle \chi_k \rangle + \sigma_\chi^2 / 2)$$

при наших значениях $\langle \chi_k \rangle$ и σ_χ^2 равен 0.64. Такая оценка, хотя и является достаточно грубой, имеет, тем не менее, косвенное подтверждение [10]: численно моделируя слой среды системой эквидистантных фазовых экранов, можно непосредственно вычислить: $\langle N(t) \rangle \sim \exp(0.68t)$, что согласуется с найденным здесь значением $\gamma(1)$.

Исследуем теперь поведение плотности вероятностей интенсивности в окрестности каустики. Поскольку интенсивность $I(t) = I_0 / |J(t)|$, то ее плотность вероятностей $w_I(I; t)$ выражается через плотность вероятностей расходимости $w_j(j; t)$:

$$w_I(I; t) = \langle \delta [I - I(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(I - I_0/|j|) w_j(j; t) dj,$$

и по свойствам дельта-функции

$$w_I(I; t) = \frac{I_0}{I^2} \left[w_j \left(\frac{I_0}{I^2}; t \right) + w_j \left(-\frac{I_0}{I^2}; t \right) \right].$$

Не находя функции $w_j(j; t)$, но пользуясь тем, что нас интересует сейчас только область каустик, где $I \rightarrow \infty$, выясним свойства $w_j(j \rightarrow 0; t)$. Для этого заметим, что в точках каустик с учетом (1) и свойств дельта-функции

$$w_j(0; t) = \langle \delta [J(t)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{\delta(t - t_n)}{|U_n|} \right\rangle. \quad (17)$$

Ранее мы установили, что $U_n \neq 0$ (равенство (5)), поэтому всегда $w_j(j \rightarrow 0; t) > 0$. Это приводит к степенному закону спада плотности вероятности в окрестностях каустик:

$$w_j(I \rightarrow \infty; t) = \frac{2I_0}{I^2} w_j(0; t). \quad (18)$$

Причина такого медленного ($\sim I^{-2}$) спада заключается в бесконечно больших выбросах интенсивности в точках каустик, а физическим следствием является тот факт, что вдоль фиксированного луча даже средняя интенсивность волны оказывается, в приближении геометрической акустики, бесконечной.

В приложениях больший интерес представляет статистика волны в фиксированной точке пространства – эйлерова статистика. Для первоначально плоской волны формулы связи лагранжевой и эйлеровой статистик имеют особенно простой вид [5, 7]:

$$w_I^E(I; t) = \frac{I_0}{I} w_I^L(I; t),$$

откуда видно, что эйлерова плотность вероятностей спадает по более быстрому, чем лагранжева, степенному закону $\sim I^{-3}$, обеспечивающему ограниченность средней интенсивности и выполнение инварианта $\langle I \rangle = I_0$.

Найдем зависимость плотности вероятностей интенсивности от расстояния t . Для этого вернемся к выражению (17). При $t \gg \langle \tau_k \rangle$ полукачественная оценка, сделанная с учетом асимптотической формулы (14), дает

$$w_j(0; t) \approx \langle \tau_k \rangle^{-1} < 1/|U_0(\tau_0)| \exp[\gamma(-1)t].$$

Это значит, что при найденных значениях $\langle \chi_k \rangle$ и σ_χ^2 плотность вероятностей $w_I(I \rightarrow \infty; t)$ как функция t спадает экспоненциально:

$$w_I(I \rightarrow \infty; t) \sim \frac{2I_0}{I^2} \exp(-0,34t). \quad (19)$$

Этот результат наглядно можно интерпретировать как истончение каустик.

Наряду с оценкой вероятностных свойств интенсивности найденное значение среднего $\langle \chi_k \rangle$ позволяет проанализировать зависимость интенсивности от расстояния t , а именно – решить вопрос о существовании мажорантной кривой. По-

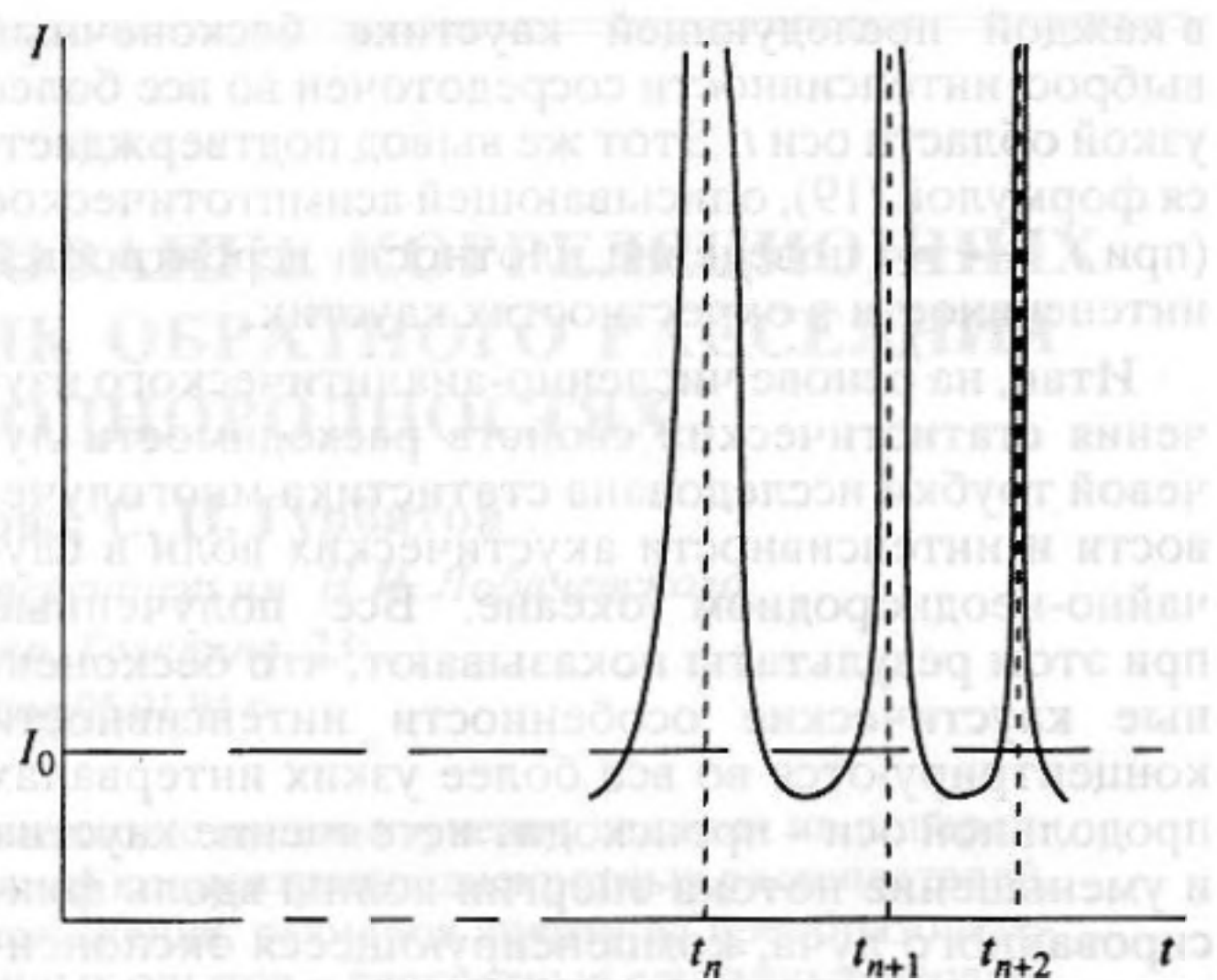


Рис. 3. Схематическая зависимость интенсивности волны в окрестностях каустик от расстояния вдоль луча.

скольку полученное $\langle \chi_k \rangle > 0$, то это значит, что существует такая экспоненциально спадающая целочисленная функция [6]

$$M(n, p, \langle \chi_k \rangle, \beta) = A \exp [(\beta - \langle \chi_k \rangle) n], \quad (20)$$

что с любой заданной вероятностью $p < 1$ значение V_n лежит ниже ее. Здесь параметр β удовлетворяет неравенству $0 < \beta < \langle \chi_k \rangle$, а вероятность p , с которой V_n нигде не превышает мажорантной кривой (20), зависит от ее параметров A, β . Для непрерывного винеровского процесса со сносом в [6] получено

$$p = 1 - A^{-\beta}. \quad (21)$$

В нашем случае V_n – последовательность, определенная в дискретных точках n , поэтому вероятность, с которой она нигде не превышает мажорантной кривой (20) с теми же A, β больше, чем (21), или, по-другому, соответствующая тому же параметру β и вероятности p мажорантная кривая для дискретной последовательности лежит ниже, чем для непрерывного процесса.

Записывая теперь интенсивность волны вблизи каустик в виде

$$I(t) = V_n / |t - t_n|$$

и учитывая наличие для V_n мажорантной кривой (20), получаем, что область, в которой наблюдаются бесконечные выбросы интенсивности, с ростом номера каустики n становится все тоньше (рис. 3). Это значит, что квазипериодичность образования каустик состоит только в том, что они квазипериодически повторяются в каждом луче. В то же время наличие экспоненциально спадающей мажорантной кривой (20) делает зависимость $I(t)$ в окрестностях каустик неповторяющейся:

в каждой последующей каустике бесконечный выброс интенсивности сосредоточен во все более узкой области оси t . Этот же вывод подтверждается формулой (19), описывающей асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение плотности вероятностей интенсивности в окрестностях каустик.

Итак, на основе численно-аналитического изучения статистических свойств расходимости лучевой трубки исследована статистика многолучевости и интенсивности акустических волн в случайно-неоднородном океане. Все полученные при этом результаты показывают, что бесконечные каустические особенности интенсивности концентрируются во все более узких интервалах продольной оси – происходит истончение каустик и уменьшение потока энергии волны вдоль фиксированного луча, компенсирующееся экспоненциально нарастающей многолучевостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. Флатте. С.М. М.: Мир, 1982. С. 11.
2. Кляцкин В.И. Стохастический волновой параметрический резонанс (флуктуации интенсивности волны внутри одномерной случайной среды) // Изв. ВУЗ. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 2. С. 180 - 181.
3. Kulkarny V.A., White B.S. Focusing of waves in turbulent inhomogeneous media // Phys. Fluids. 1982. V. 25. P. 1770 - 1784.
4. White B.S. The Stochastic Caustic // SIAM J. Appl. Math. 1984. V. 44. № 1. P. 127 - 149.
5. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. С. 63.
6. Кляцкин В.И., Саичев А.И. Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически слоистых средах // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 3. С. 161 - 194.
7. Малахов А.Н., Саичев А.И. О вероятностном описании случайных полей, удовлетворяющих простейшим уравнениям гидродинамического типа // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1974. Т. 67. № 6(12). С. 940 - 950.
8. Спр. по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. С. 150.
9. Малахов А.Н., Саичев А.И. Кинетическое уравнение для световой волны. Флуктуации интенсивности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1974. Т. 67. № 6(12). С. 2080 - 2086.
10. Грибова Е.З., Саичев А.И. Расчет характеристик многолучевого распространения волн в случайной среде методом фазовых экранов // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 2. С. 193 - 199.

Chaotic Focusing of Ray Tubes in a Random Inhomogeneous Medium

E. Z. Gribova and A. I. Saichev

The dynamic and statistical properties of ray-tube divergence in a random inhomogeneous medium have been studied numerically and analytically to reveal the statistical properties of experimentally observed intensity and mean number of rays. An analysis of developed multipath propagation and the probabilistic behavior of intensity near caustics has indicated that infinite intensity surges concentrate in ever narrower intervals of the longitudinal axis. The energy flux along a fixed ray decreases and is made up for by the exponentially increasing multipath propagation.