

ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

© 2001 г. Ю. И. Бобровницкий

Институт машиноведения РАН
101990 Москва, Малый Харитоньевский пер. 4
E-mail: bobrovni@orc.ru

Поступила в редакцию 29.12.2000 г.

В общем виде доказана теорема о представлении вибрационного поля в упругой системе, которая является соединением двух подсистем. Предполагается, что система линейна и что подсистемы жестко соединены и взаимодействуют по непрерывной поверхности S . Согласно теореме, вынужденные колебания системы могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых, которые являются решениями двух более простых вспомогательных краевых задач. Первое слагаемое есть поле колебаний изолированных (разъединенных или заторможенных по S) подсистем под действием заданных внешних сил. Второе слагаемое представляет собой вынужденные колебания соединения подсистем, в которых внешние силы положены равными нулю, а на поверхности S действуют силы реакции, полученные при решении первой вспомогательной задачи. Теорема применена к задаче об отражении и прохождении упругих волн через соединение двух сред. Показано, что использование теоремы сокращает вычисления. Обсуждаются другие применения.

Для анализа вынужденных колебаний составных упругих систем обычно применяется декомпозиционный подход: система разбивается на ряд более простых подсистем, анализируется каждая из них в отдельности, а затем парциальные решения объединяются в общем решении для всей системы. На этом подходе основаны энергетический метод SEA [1], методы решения акусто-упругих задач [2, 3], метод передаточных функций [4] и многие другие. Модификацией подхода является и замена сложной краевой задачи на конечную последовательность более простых задач. Классическим примером является представление поля суммой падающего и рассеянного полей в теории дифракции волн [5]: падающее поле есть решение задачи о вынужденных колебаниях среды с заданными источниками, но без рассеивателя, а рассеянное поле – это решение задачи об излучении рассеивателя в среду без источников. Несомненно, что каждая из этих двух вспомогательных задач проще, чем первоначальная задача о вынужденных колебаниях среды с рассеивателем. В работе [6] было приведено без доказательства одно из обобщений этого результата теории дифракции на произвольные линейные колебательные системы. В данном сообщении это обобщение расширено и строго доказано в виде теоремы о представлении поля вынужденных колебаний линейной системы, состоящей из двух подсистем, соединенных по поверхности S . Теорема утверждает, что решение задачи о вынужденных колебаниях системы под действием внешних сил можно представить в виде суммы двух слагае-

мых: первое слагаемое является решением задачи о вынужденных колебаниях изолированных подсистем (разъединенных или с заторможенной контактной поверхностью S), а второе слагаемое представляет собой вынужденные колебания всей системы под действием более простых внешних усилий (точнее, сил реакции на S , найденных в первой задаче). Теорема проиллюстрирована на задаче об отражении и прохождении упругих волн через соединение двух сред. Показано, что применение теоремы сокращает вычисления. Обсуждаются приложения к другим задачам.

Рассмотрим произвольную линейную колебательную систему, которую можно представить как соединение по непрерывной поверхности S двух подсистем a и b (см. рис. 1). Запишем уравнения колебаний и граничные условия системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_a u &= \varphi_a \text{ в области } V_a, \\ M_a u &= \psi_a \text{ на части поверхности } S_a, \\ L_b v &= \varphi_b \text{ в области } V_b, \\ M_b v &= \psi_b \text{ на части поверхности } S_b, \\ u &= v, \quad f + g = 0 \text{ на контактной поверхности } S. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u и v – это векторы смещений подсистем a и b ; $f = l_a u$ и $g = l_b v$ – плотности внутренних сил (напряжений), действующих на подсистемы на поверхности S ; $L_{a,b}$, $M_{a,b}$, $l_{a,b}$ – дифференциальные операторы; $\varphi_{a,b}$ и $\psi_{a,b}$ – это плотности внешних объемных и поверхностных сил. Уравнениями (1) записана неоднородная краевая задача математи-

ческой физики, которая описывает вынужденные колебания всех (известных автору) линейных сред и конструкций.

Решение задачи (1) будем искать в виде суммы решений двух более простых вспомогательных задач

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1. \quad (2)$$

Пусть первая вспомогательная задача описывает вынужденные колебания u_0 и v_0 изолированных подсистем. Два приводимых ниже представления поля отличаются граничными условиями на контактной поверхности S первой вспомогательной задачи: представление 1 соответствует заторможенной поверхности S , а представление 2 – свободной от внешних усилий. Вторая вспомогательная задача для определения слагаемых u_1 и v_1 формулируется после подстановки решения (2) в уравнения (1). Как будет показано ниже, вторые вспомогательные задачи этих двух представлений также отличаются только граничными условиями на S . Рассмотрим каждое представление в отдельности.

Представление 1. Положим, что в первой вспомогательной задаче смещения обеих подсистем на контактной поверхности равны нулю. Это означает, что функции u_0 и v_0 являются решениями следующих двух несвязанных краевых задач для подсистем a и b :

$$\begin{aligned} L_a u_0 &= \varphi_a \text{ в } V_a, & M_a u_0 &= \psi_a \text{ на } S_a, & u_0 &= 0 \text{ на } S; \\ L_b v_0 &= \varphi_b \text{ в } V_b, & M_b v_0 &= \psi_b \text{ на } S_b, & v_0 &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом силы реакции, которые действуют на подсистемы со стороны неподвижной границы S , равны

$$f_0 = l_a u_0, \quad g_0 = l_b v_0. \quad (4)$$

Подставив решение (2) в уравнения (1), учитывая равенства (3), получим следующие уравнения для определения слагаемых u_1 и v_1

$$\begin{aligned} L_a u_1 &= 0 \text{ в } V_a, & M_a u_1 &= 0 \text{ на } S_a, \\ L_b v_1 &= 0 \text{ в } V_b, & M_b v_1 &= 0 \text{ на } S_b, \end{aligned} \quad (5)$$

$$u_1 = v_1, \quad l_a u_1 + l_b v_1 = -(f_0 + g_0) \text{ на } S.$$

Как видно из этих уравнений, вторая вспомогательная задача представляет собой колебания всей системы с выключенными источниками ($\varphi_{a,b} = \psi_{a,b} = 0$) под действием сил реакции (4), приложенных к контактной поверхности S . Схематически представление 1 изображено на рис. 1а.

Представление 2. Пусть первые слагаемые в решении (2) являются полями в разъединенных по S подсистемах. Тогда первая вспомогательная задача имеет вид

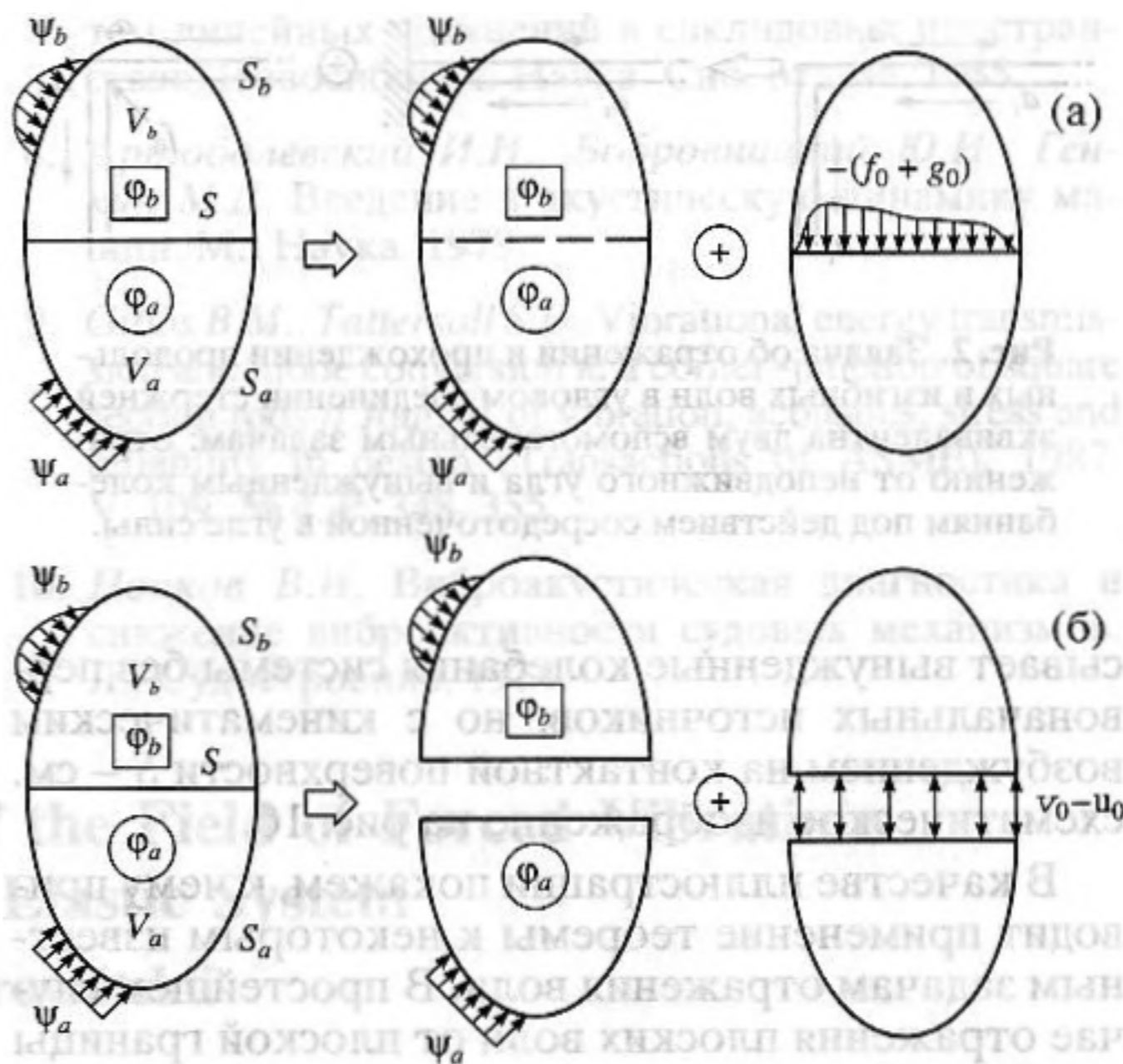


Рис. 1. Поле вынужденных колебаний составной системы представляется суммой двух полей: а – поля вынужденных колебаний подсистем с неподвижной контактной поверхностью S и поля колебаний системы под действием силового возбуждения на S ; б – поля вынужденных колебаний разъединенных подсистем и поля колебаний системы с кинематическим возбуждением.

$$\begin{aligned} L_a u_0 &= \varphi_a \text{ в } V_a, & M_a u_0 &= \psi_a \text{ на } S_a, & l_a u_0 &= 0 \text{ на } S; \\ L_b v_0 &= \varphi_b \text{ в } V_b, & M_b v_0 &= \psi_b \text{ на } S_b, & l_b v_0 &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя решение (2) в первоначальные уравнения (1) и учитывая уравнения (6), получим следующие уравнения и граничные условия для второй вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} L_a u_1 &= 0 \text{ в } V_a, & M_a u_1 &= 0 \text{ на } S_a, \\ L_b v_1 &= 0 \text{ в } V_b, & M_b v_1 &= 0 \text{ на } S_b, \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_1 - v_1 = v_0 - u_0, \quad l_a u_1 + l_b v_1 = 0 \text{ на } S.$$

Физический смысл уравнений (7) таков. Они описывают колебания всей системы без источников ($\varphi_{a,b} = \psi_{a,b} = 0$) под действием специфического воздействия на контактной поверхности S . Воздействие состоит из двух одинаковых противоположенных сил $l_a u_1$ и $l_b v_1$, приложенных к разъединенным подсистемам и имеющих такую величину, что относительное колебательное смещение между подсистемами $u_1 - v_1$ равняется фиксированной величине $v_0 - u_0$, заданной решением первой вспомогательной задачи (6). Практически такое воздействие можно реализовать, например, с помощью пьезокерамических пластинок, вставленных между подсистемами. Таким образом, вторая вспомогательная задача в представлении 2 опи-

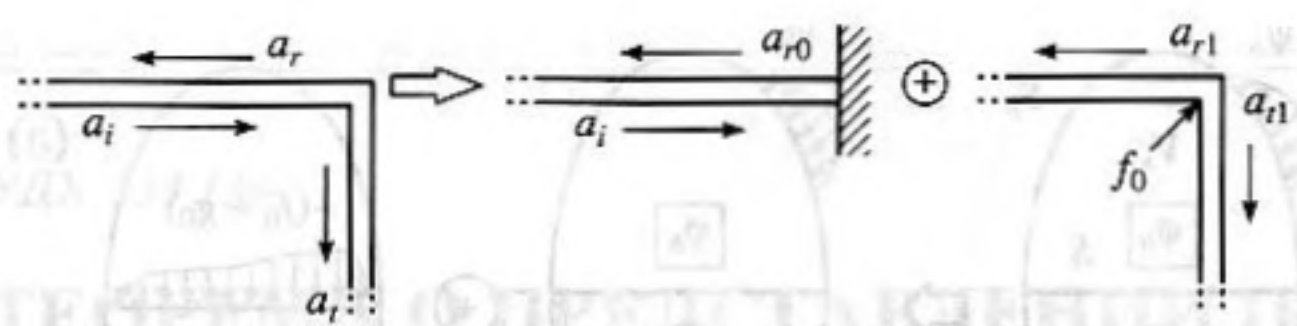


Рис. 2. Задача об отражении и прохождении продольных и изгибных волн в угловом соединении стержней эквивалентна двум вспомогательным задачам: отражению от неподвижного угла и вынужденным колебаниям под действием сосредоточенной в угле силы.

сывает вынужденные колебания системы без первоначальных источников, но с кинематическим возбуждением на контактной поверхности S – см. схематическое изображение на рис. 1б.

В качестве иллюстрации покажем, к чему приводит применение теоремы к некоторым известным задачам отражения волн. В простейшем случае отражения плоских волн от плоской границы двух полубесконечных однородных жидких сред с импедансами Z_1 и Z_2 решение задачи дается формулами Френеля для коэффициента отражения R и коэффициента прохождения T из первой среды во вторую:

$$R = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1), \quad T = 2Z_2/(Z_2 + Z_1). \quad (8)$$

Согласно приведенной выше теореме, эти коэффициенты могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых. Представление 1 (см. (2)–(5)) здесь имеет вид

$$R = 1 - 2Z_1/(Z_2 + Z_1), \quad T = 0 + 2Z_2/(Z_2 + Z_1), \quad (9)$$

в котором первые слагаемые (1 и 0) соответствуют падению плоской волны давления амплитуды p_i на неподвижную границу, а вторые слагаемые – это колебания двух сред (без падающей волны) под действием распределенной на границе внешней силы амплитуды $-2p_i$.

Представление 2 (см. (2), (6), (7)) записывается в виде

$$R = -1 + 2Z_2/(Z_2 + Z_1), \quad T = 0 + 2Z_2/(Z_2 + Z_1), \quad (10)$$

где первые слагаемые (-1 и 0) соответствуют падению плоской волны на абсолютно мягкую границу (среды разъединены), а вторые слагаемые представляют собой движение сред (без падающей волны) под действием расположенного между средами распределенного источника, обеспечивающего на границах обеих сред равные давления и поддерживающего между ними фиксированную относительную скорость амплитуды $2p_i/Z_1$.

В этом примере в силу его простоты представления (9) и (10) не имеют преимуществ перед формулами Френеля (8) ни с точки зрения их структуры, ни с точки зрения количества вычислений. Иначе обстоит дело с более сложными задачами

отражения. Пусть, например, рассматривается отражение и прохождение волн в соединении двух сред или волноводов, в которых могут существовать N нормальных волн. Задача состоит в нахождении двух $N \times N$ -матриц коэффициентов отражения и прохождения. Прямое решение этой задачи приводит к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений. В то же время применение доказанной выше теоремы сводит ее к двум системам N -го порядка. Так как количество вычислений, необходимое для решения системы, пропорционально кубу ее порядка [7], то использование представлений (2) может дать 4-кратную экономию в вычислениях. Автор проверил это на задаче об отражении волн в угловом соединении двух тонких полубесконечных однородных прямых стержней (рис. 2). Для колебаний стержней в плоскости угла число нормальных волн равно $N = 3$ (одна продольная волна и две изгибные волны – распространяющаяся и неоднородная). Прямое решение путем сшивания полей в угле приводит к системе шести алгебраических уравнений [8, 9], а использование представления 1 настоящей работы (см. рис. 2) привело даже более чем к четырехкратному сокращению вычислений, так как продольные и изгибные волны в отдельных стержнях независимы, и аналитическое решение вспомогательных задач здесь элементарно.

В заключение отметим, что наиболее важные приложения теоремы, сформулированной в этой работе, следует ожидать при решении задач о вынужденных колебаниях составных упругих систем со сложными или неизвестными источниками. Примером может служить работающая машина: так как описать источники вибраций внутри машины пока не представляется возможным, теорема (представление 2) позволяет, оставаясь в рамках строгого рассмотрения, “снести” источники на опоры машины – см. также [10]. Другой пример задачи этого типа – прохождение звука в упругую оболочку от работающего винта в потоке [2, 3]. Применение представления 1 позволяет разделить расчет внешнего акустического поля винта и расчет колебаний оболочки совместно с полем внутреннего акустического объема и таким образом существенно упростить решение задачи в целом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00577а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis. Proceedings edited by Fahy F.J. and Price W.G. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 371. с.
2. Wilby J.F. Aircraft interior noise // J. Sound and Vibration. 1996. V. 190. № 3. P. 545–564.

3. *Mixson J.S., Powell C.A.* Review of recent research on interior noise of propeller driven aircraft // *Journal of Aircraft*. 1985. V. 22. P. 931–949.
4. *Lim T.C., Li J.* A theoretical and computational study of the FRF-based substructuring technique applying enhanced least square and TSVD approaches // *J. Sound and Vibration*. 2000. V. 231. № 4. P. 1135–1157.
5. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
6. *Бобровницкий Ю.И.* Расчет вибрационных и акустических полей в инженерных конструкциях // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308. № 5. С. 1061–1065.
7. *Годунов К.С., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ие, 1988.
8. *Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
9. *Gibbs B.M., Tattersall S.D.* Vibrational energy transmission and mode conversion at a corner-junction of square section rods // *Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design (Transactions of ASME)*. 1987. V. 109. № 4. P. 348–355.
10. *Попков В.И.* Виброакустическая диагностика и снижение виброактивности судовых механизмов. Л.: Судостроение, 1974.

A Theorem on Representation of the Field of Forced Vibrations of a Composite Elastic System

Yu. I. Bobrovnitskii

A theorem on representation of a vibration field of an elastic system comprising two subsystems is proved in a general form. It is assumed that the system is linear and the subsystems are rigidly connected and interact along a continuous surface S . According to the theorem, forced vibrations of the system can be represented in the form of the sum of two components, which are the solutions of two simpler auxiliary boundary-value problems. The first component is the field of vibrations of the isolated (separated or blocked along S) subsystems under the effect of preset external forces. The second component represents the forced vibrations of the junction of the subsystems, where the external forces are taken equal to zero and only the reaction forces obtained in solving the first auxiliary problem act at the surface S . The theorem is applied to the problem on the reflection and transmission of elastic waves through a junction of two media. It is demonstrated that the theorem utilization reduces the amount of calculation. Other applications are discussed.

В статье доказана теорема о представлении поля вынужденных колебаний в линейной упругой системе, состоящей из двух жестко связанных подсистем, взаимодействующих по непрерывной поверхности S . Согласно теореме, вынужденные колебания системы можно представить суммой двух компонент, являющихся решениями двух более простых граничных задач. Первая компонента — это поле колебаний изолированных (отделенных или заблокированных по поверхности S) подсистем под действием заданных внешних сил. Вторая компонента представляет вынужденные колебания соединения подсистем, где внешние силы приняты равными нулю, а в качестве внешних сил выступают реакции, полученные при решении первой граничной задачи. Теорема применяется к задаче отражения и преломления упругих волн на стыке двух сред. Показано, что применение теоремы уменьшает объем вычислений. Рассмотрены и другие приложения.