

УДК 535.12:534.532

ЛУЧЕВОЙ ПОДХОД ДЛЯ АНАЛИЗА МОДОВОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В ПЕРЕМЕННОМ ПО ТРАССЕ ВОЛНОВОДЕ

© 2001 г. А. Л. Вировлянский, Л. Я. Любавин, А. А. Стромков

Институт прикладной физики РАН

603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46

E-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 2.10.2000 г.

Получены простые лучевые формулы для амплитуд мод в волноводе с параметрами, зависящими от дистанции. Идея обсуждаемого подхода состоит в разложении по модам комплексной амплитуды поля, найденной в приближении геометрической оптики. Рассмотрен конкретный пример расчета амплитуд мод в глубоководном акустическом волноводе с профилем скорости звука, неадиабатически меняющимся с дистанцией. Результат расчета сравнивается с численным решением той же задачи методом параболического уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Хорошо известно, что использование приближения ВКБ позволяет получить простое аналитическое описание модовой структуры поля в плоскостром и адиабатически меняющемся вдоль трассы волноводе [1–3]. Если условие адиабатичности нарушается, то есть параметры волновода меняются с дистанцией слишком быстро, для расчета амплитуд мод обычно приходится применять численные методы [2, 4, 5]. Отсутствие аналитического описания затрудняет изучение влияния вариаций параметров среды на модовую структуру поля. Особенно большие трудности возникают при решении обратных задач. Не случайно в схемах модовой акустической томографии поле часто пытаются описывать в адиабатическом приближении [6], которое в реальных условиях имеет довольно ограниченную область применимости.

В данной работе мы делаем попытку преодолеть указанное ограничение метода нормальных волн и получить такие аналитические выражения для амплитуд мод, которыми можно пользоваться в переменном по трассе волноводе независимо от того, применимо адиабатическое приближение или нет. Наша идея состоит в использовании преимуществ лучевого подхода, который – в отличие от модового – не теряет своей простоты и физической прозрачности при нарушении адиабатического приближения. Геометрооптические формулы для амплитуды и эйконала луча остаются в силе и в неадиабатическом волноводе.

Решение волнового уравнения, полученного методом геометрической оптики, мы раскладываем по нормальным модам и вычисляем возникающие при этом интегралы методом стационарной фазы. Результатом являются относительно про-

стые выражения для амплитуд мод через параметры лучевых траекторий. Ранее аналогичный подход применялся в работах [7, 8] (см. также работу [9], в которой похожий метод использовался в задачах квантового хаоса), где исследовались вариации модовой структуры поля под влиянием переменного по трассе возмущения профиля скорости звука. На каждой дистанции поле раскладывалось по модам невозмущенного волновода, который был плоскострым, и для амплитуд этих мод были найдены простые лучевые формулы. Такой метод на практике годится лишь в тех случаях, когда переменный по трассе волновод не сильно отличается от плоскостромого. В подводной акустике, особенно в задачах в дальнем распространении звука в океане, характеристики волновода нередко кардинально меняются вдоль трассы, и поэтому рассмотренный в [7, 8] подход нуждается в обобщении.

Такое обобщение сделано в настоящей статье. Здесь получены формулы для амплитуд так называемых локальных мод или, другими словами, мод волновода сравнения [1]. В рамках обсуждаемого подхода показатель преломления не разбивается на невозмущенную компоненту и возмущение. В частном случае двухслойной модели волновода с переменной по трассе глубиной результаты данной работы совпадают с полученными в [10].

Мы пренебрегаем горизонтальной рефракцией волн и ограничиваемся рассмотрением цилиндрически-симметричной задачи. Используем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) с осью z , направленной вертикально вниз (плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью воды), и считаем, что скорость звука с не зависит от азимутального угла ϑ . Комплексная амплитуда монохроматичес-

кого (тонального) звукового поля $u(r, z)$ задается уравнением Гельмгольца [1, 2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 n^2(r, z) u = 0, \quad (1)$$

$$n(r, z) = c_0/c(r, z),$$

где n – показатель преломления, $k = 2\pi f/c_0$, f – несущая частота, c_0 – константа.

В малоугловом приближении упрощенное описание может быть получено путем перехода к параболическому уравнению для плавной огибающей волнового поля $v(r, z)$, связанной с $u(r, z)$ соотношением $u(r, z) = v(r, z) \exp(ikz)/\sqrt{r}$. Подставляя это выражение в (1) и пренебрегая второй производной по продольной координате r , приходим к параболическому уравнению [1, 2, 11]

$$2ik \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2k^2 U(r, z) v = 0, \quad (2)$$

$$U(r, z) = \frac{1}{2}(1 - n^2(r, z)).$$

В данной работе мы рассматриваем модовую структуру поля для обоих уравнений (1) и (2). Для каждого из них приведены свои формулы, выражающие соответствующий гамильтонов формализм для расчета лучевой картины. При этом одинаковые характеристики лучей и мод в обоих случаях обозначаются одинаковыми символами. Это не может привести к путанице, так как решения уравнения Гельмгольца и решения параболического уравнения рассматриваются в разных разделах статьи.

На первый взгляд можно было бы обойтись анализом одного уравнения (1), тем более, что использование малоуглового приближения не приводит к существенным упрощениям. Внимание к уравнению (2) вызвано двумя причинами. Во-первых, это уравнение, в отличие от (1), может быть легко решено численно даже для переменного по трассе волновода. Имеется ряд точных и быстродействующих программ для решения параболического уравнения, одну из которых (она называется UMPE [13]) мы использовали для количественной оценки точности наших приближенных формул. Для уравнения (1) осуществить такое сопоставление было бы гораздо сложнее. Вторая причина заключается в том, что параболическое уравнение (2) формально совпадает с уравнением Шредингера и наши результаты можно использовать в квантовомеханических задачах для анализа волновых функций в потенциальных ямах с параметрами, меняющимися во времени.

2. ЛУЧИ И МОДЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

2.1. Лучевое представление поля

В приближении геометрической оптики решение уравнения (2) представляется в виде $v = A \exp(ikS)$, где A и S – соответственно, амплитуда и эйконал луча. Прежде чем привести явные выражения для S и A [12], кратко остановимся на гамильтоновом формализме, который будем использовать для описания лучевой структуры поля. В его рамках лучевая траектория полностью аналогична траектории частицы в классической механике. При этом продольная координата r является аналогом времени. Аналогом механического импульса является величина $p = dz/dr = \tan \chi$, где χ – угол скольжения луча. Соответствующий гамильтониан задается соотношением

$$H = \frac{p^2}{2} + U(r, z). \quad (3)$$

Уравнения Гамильтона, определяющие движение механической частицы [14], в нашем случае являются лучевыми уравнениями и принимают вид:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \quad (4)$$

Эйконал S , являющийся аналогом механического действия, равен

$$S = \int (pdz - Hdx), \quad (5)$$

где интегрирование ведется вдоль лучевой траектории (решения системы лучевых уравнений (4)). Отметим две хорошо известные в механике формулы [14], которые будут полезны нам в дальнейшем:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial z_0} = -p_0. \quad (6)$$

Эйконал S рассматривается здесь как функция начальной глубины z_0 , конечной глубины z и расстояния r .

Лучевые траектории в волноводе осциллируют и поэтому для их описания в дополнение к переменным “импульс–координата” (p, z) удобно использовать переменные “действие–угол”, связанные с (p, z) известным каноническим преобразованием [14]. В данной работе нам понадобится лишь переменная действия (не путать с аналогом механического действия S , представляющим эйконал). Она вводится следующим образом.

Для начала рассмотрим плоскостойкий волновод ($U = U(z)$). В таком волноводе гамильтониан не меняется вдоль лучевой траектории:

$$H = E = \text{const}. \quad (7)$$

В механике (7) выражает закон сохранения энергии, а в геометрической оптике – это закон Снеллиуса в малоугловом приближении. Переменная действия I определяется соотношением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dz = \frac{1}{\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \sqrt{2(E - U(z))}, \quad (8)$$

где z_{\max} и z_{\min} – корни уравнения $U(z) = E$, задающие горизонты заворота лучевой траектории. Соотношение (8) фактически задает связь переменных E и I , то есть определяет функцию $E(I)$ и, разумеется, обратную ей функцию $I(E)$.

Отметим следующее соотношение, хорошо известное в классической механике [14]:

$$\frac{dE}{dI} = \frac{2\pi}{D}, \quad (9)$$

где D – длина цикла луча (период траектории вдоль координаты r).

В переменном по трассе волноводе связь между E и I определяется с использованием понятия *волновода сравнения* [1]. Этим термином обозначают воображаемый плоскостойкий волновод, вертикальное сечение которого совпадает с вертикальным сечением исследуемого волновода на данной дистанции. Для реального переменного по трассе волновода на каждой дистанции вводится свой волновод сравнения. Для каждого волновода сравнения, то есть для каждой дистанции r , формула (8) задает, вообще говоря, свою связь между “энергией” E и переменной действия I , то есть свою функцию $E(I)$ и соответствующую ей $I(E)$. Таким образом, в переменном по трассе волноводе данные функции переходят в $E(I, r)$ и $I(E, r)$. Дополнительный аргумент r , задавая дистанцию, тем самым определяет параметры волновода сравнения. Соотношение (9) при этом остается в силе, если полную производную по I заменить на частную и под D понимать длину цикла луча в волноводе сравнения.

Введенная таким образом функция $I(E, r)$ определяет переменную действия луча, который на дистанции r имеет энергию E . В данной работе мы не делаем предположения о плавной зависимости параметров волновода от расстояния и не пользуемся известным свойством адиабатической инвариантности переменной действия [14].

В заключение этого раздела приведем известное выражение для комплексной амплитуды поля точечного источника [12], полученное в приближении геометрической оптики. Поле подчиняется уравнению (2) с правой частью $2ik\delta(z - z_0)\delta(r)$. При $r \rightarrow 0$ решение совпадает с функцией Грина в свободном пространстве

$$v = \sqrt{\frac{k}{2\pi ir}} \exp\left[i\frac{k(z - z_0)^2}{2r}\right]. \quad (10)$$

На произвольном расстоянии от источника типичной является ситуация, когда в точку наблюдения приходит несколько лучей. Для определения полного поля вклады всех таких лучей следует просуммировать по формуле [12]

$$v = \sum_{\nu} \sqrt{\frac{k}{2\pi i |z_{p_0}^{\nu}|}} \exp[ikS^{\nu} - i\mu^{\nu}\pi/2], \quad (11)$$

где верхний индекс ν нумерует принимаемые лучи, μ^{ν} – индекс траектории ν -го луча, равный числу каустик, которых данный луч успел коснуться на пути в точку наблюдения (предполагаем, что все эти каустики неособые), нижний индекс p_0 означает частную производную по начальному значению импульса.

2.2. Модовое представление поля

На каждой дистанции r поле будем раскладывать по модам волновода сравнения, которые называют также “локальными модами”. В этом разделе мы приводим основные соотношения для собственных функций плоскостойкого волновода, каковым по определению является любой волновод сравнения, взятый в приближении ВКБ [1]. Собственные функции являются решениями уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi_m}{dz^2} + k^2(E_m - U)\phi_m = 0$$

с соответствующими граничными условиями. Собственные значения “энергии” E_m находятся из соотношения $E_m = E(I_m)$ с функцией $E(I)$, заданной уравнением (8) и значением переменной действия, отвечающей m -й моде, заданной в соответствии с правилом квантования Бора–Зоммерфельда [1]

$$kI_m = m - \frac{\phi_s + \phi_b}{2\pi}. \quad (12)$$

В этой формуле ϕ_s и ϕ_b равны фазам коэффициентов отражения в верхней (ближайшей к поверхности) и нижней (ближайшей ко дну) точках заворота соответственно. Если точка заворота находится в толще воды, то фаза коэффициента отражения $\phi = -\pi/2$. При отражении от абсолютно мягкой границы $\phi = \pi$, а при отражении от абсолютно жесткой границы $\phi = 0$.

В области между своими точками заворота метод ВКБ дает следующее представление для собственной функции:

$$\phi_m(z) = \phi_m^+(z) + \phi_m^-(z), \quad (13)$$

где $\varphi_m^\pm(z) = Q_m^\pm \exp[\pm i(kS_m(z) + \phi_s/2)]$, (14)

$$S_m(z) = \int_{z_{\min}}^z dz p_m(z), \quad (15)$$

$$p_m(z) = \sqrt{2[E_m - U(z)]}, \quad (16)$$

$$D_m = 2E_m \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{p_m(z)}, \quad (17)$$

$$Q_m^\pm = \sqrt{\frac{E_m}{p_m(z)D_m}} \exp(\pm i\phi_s/2). \quad (18)$$

В приближении ВКБ собственная функция выражена через параметры луча с "энергией", равной $E = E_m$. В частности, D_m – длина цикла данного луча, а $p_m(z)$ – импульс луча на горизонте z .

2.3. Разложение лучевого представления поля по локальным модам

Модовое представление поля в неоднородном волноводе имеет вид:

$$v = \sum_m B_m(r) \varphi_m(r, z). \quad (19)$$

Здесь мы явно ввели аргумент r локальной моды, который опускали в предыдущем разделе. Пользуясь ортогональностью собственных функций локальных мод, запишем амплитуду моды в виде

$$B_m = \int dz v(r, z) \varphi_m(r, z), \quad (20)$$

и на основании (13) и (14) разобьем ее на сумму двух компонент B_m^+ и B_m^- , где

$$B_m^\sigma = \int dz v(r, z) \varphi_m^\sigma(r, z). \quad (21)$$

Параметр σ может принимать значения +1 или -1, либо означать просто "+" или "-", если он используется в качестве верхнего индекса.

Чтобы получить явные выражения для амплитуд мод, воспользуемся приближениями ВКБ для собственных функций и лучевым представлением поля $v(r, z)$. Подставляя (11) и (14) в (21), получаем интеграл

$$B_m^\sigma = \int dz A Q^\sigma \exp[ik(S + \sigma S_m)], \quad (22)$$

для вычисления которого воспользуемся методом стационарной фазы [1]. Стационарная точка фазы подынтегрального выражения $\Phi = k(S + \sigma S_m)$ определяется из условия обращения в нуль производной

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = k(p + \sigma p_m). \quad (23)$$

При вычислении производной мы использовали соотношения (6) и (15).

Формула (23) означает, что основной вклад в поле m -й моды дает луч с импульсом, удовлетворяющим условию

$$p = -\sigma p_m(z).$$

Это условие можно переписать в виде

$$I = I_m, \quad (24)$$

где I – переменная действия луча, попадающего в стационарную точку.

Лучи, удовлетворяющие соотношению (24), мы будем называть модовыми. Их число может быть произвольным [7, 8]. Именно эти лучи определяют амплитуду моды на данной дистанции. Вычисляя интеграл (22) методом стационарной фазы, получаем следующее выражение для вклада одного модового луча:

$$B_m^\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{k \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|}} A Q^\sigma \exp(ik\Phi + i\gamma\pi/4), \quad (25)$$

где γ – знак второй производной фазы $\partial^2 \Phi / \partial z^2$. Для вычисления этой производной продифференцируем (23) по z , рассматривая импульс p в правой части как функцию z и r , то есть понимая под p импульс луча, попадающего в точку z на расстоянии r . Пользуясь соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_{p_0}}{z_{p_0}},$$

находим значение второй производной в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k \left(\frac{p_{p_0}}{z_{p_0}} - \sigma \frac{U_z}{p_m} \right) = -k\sigma \frac{E_{p_0}}{z_{p_0} p_m}. \quad (26)$$

Подставляя это соотношение в (25), находим явное выражение для вклада одного модового луча в амплитуду моды:

$$B_m^\sigma = \frac{1}{\sqrt{iD_m \left| \frac{\partial E}{\partial p_0} \right|}} \times \quad (27)$$

$$\times \exp[ik(S + \sigma S_m) + i(\gamma - 2\mu)\pi/4 + i\sigma\phi_s/2].$$

Пользуясь формулой (9), перепишем это выражение в форме

$$B_m^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \left| \frac{\partial I}{\partial p_0} \right|}} \times \quad (28)$$

$$\times \exp[ik(S + \sigma S_m) + i(\gamma - 2\mu)\pi/4 + i\sigma\phi_s/2].$$

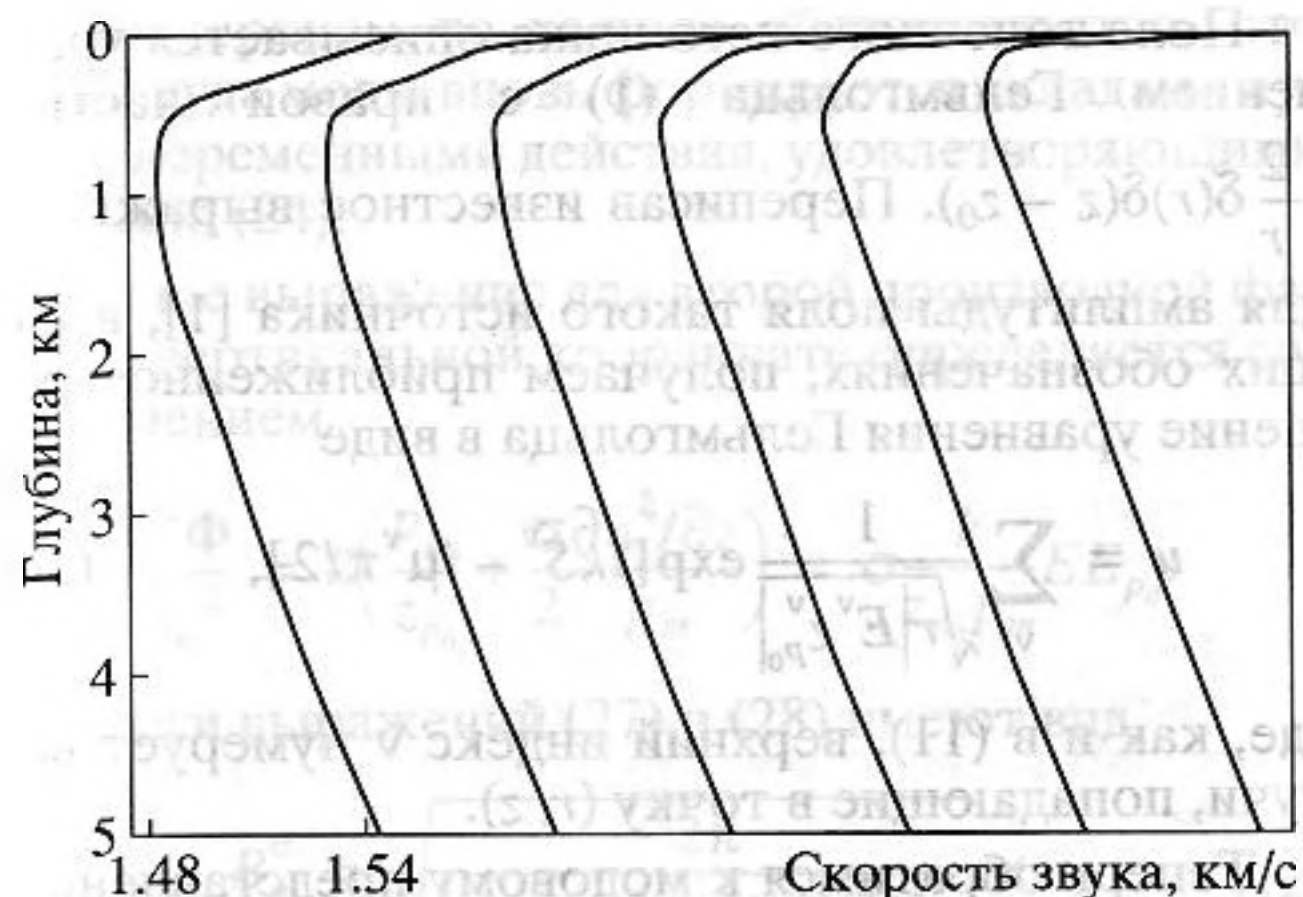


Рис. 1. Профили скорости звука в шести вертикальных сечениях волновода, эквидистантно расположенных на трассе длиной 141 км. Слева – профиль в месте расположения приемника, справа – профиль на максимальном удалении от приемника.

Для завершения расчета амплитуды m -й моды вклады всех модовых лучей, найденных по формулам (27) или (28), следует сложить.

2.4. Пример расчета амплитуд мод

Полученные результаты проиллюстрируем на конкретном примере. Рассмотрим переменный по

трассе глубоководный акустический волновод. Несколько профилей скорости звука вдоль трассы длиной 141 км показаны на рис. 1. Как видим, форма профиля скорости звука существенно меняется. В частности, ось канала с глубины 915 км при $r = 0$ поднимается до отметки 388 м при $r = 141$ км.

Поле точечного тонального источника звука, работающего на несущей частоте 200 Гц и помещенного на оси волновода при $r = 0$, было рассчитано методом параболического уравнения с помощью программы UMPE [13]. На выделенных дистанциях вертикальное сечение поля раскладывалось по локальным модам, которые были рассчитаны с помощью программы WAN [15]. При этом выяснилось, что амплитуды мод существенно образом меняются с дистанцией, то есть адиабатическое приближение в данном волноводе заведомо нарушается.

На рис. 2 квадратиками показаны амплитуды первых 160 распространяющихся мод, рассчитанных по формуле (27) на трех дистанциях 1, 91 и 141 км. В каждой точке дистанции амплитуда каждой моды формировалась вкладами двух собственных лучей. Точки показывают абсолютные величины разностей амплитуд мод, найденных с помощью UMPE и рассчитанных по формуле (27). Данные разности представляют собой величину ошибки в определении амплитуды моды нашим лучевым методом. Эта ошибка на дистанциях 1,

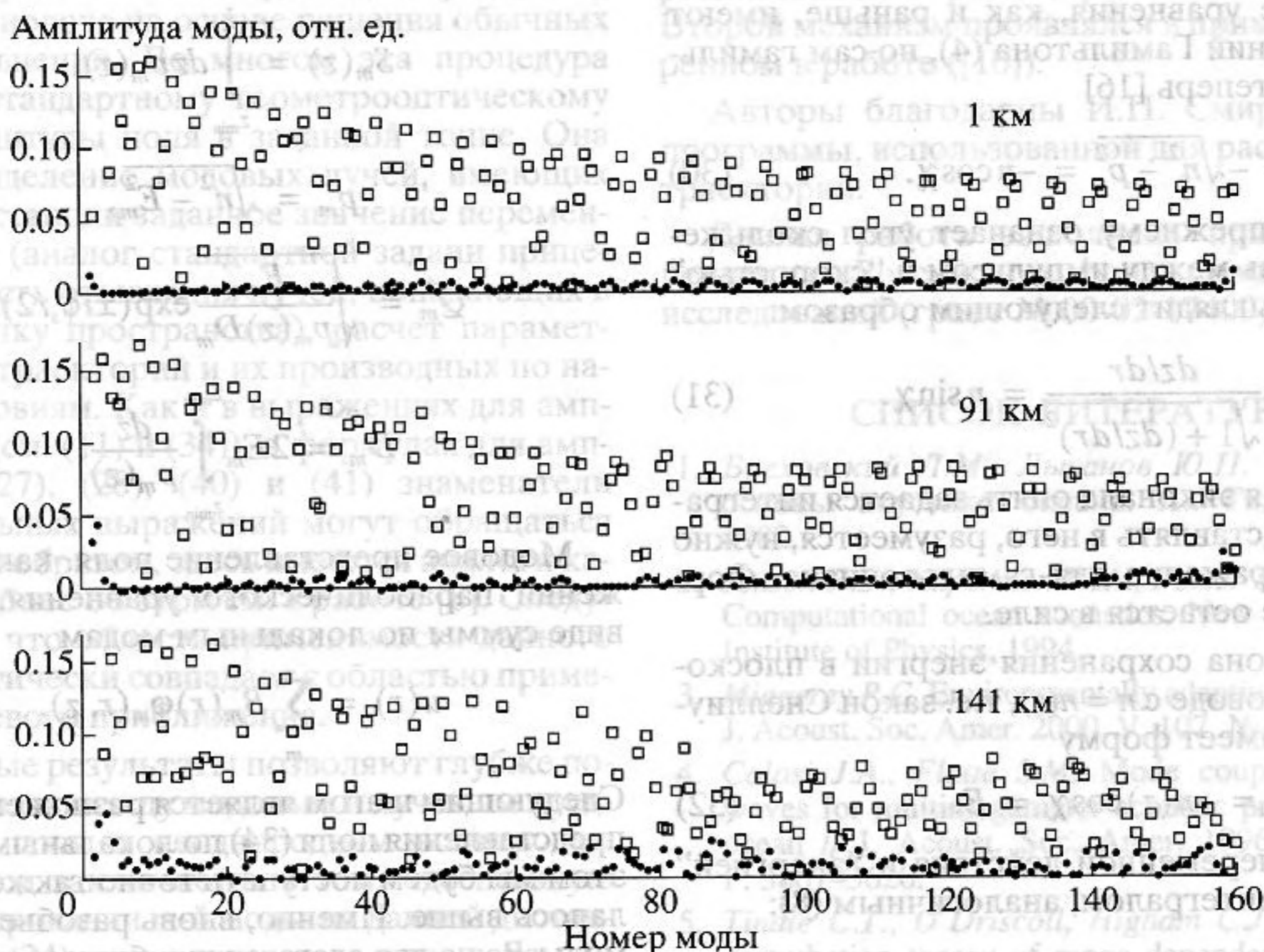


Рис. 2. Амплитуды мод (квадратики) на дистанциях 1 км (вверху), 91 км (в середине) и 141 км (внизу), найденные с помощью полученных в работе лучевых формул, и отличия данных амплитуд от их значений, рассчитанных методом параболического уравнения (точки).

91 и 141 км в среднем составляет 6% (0.5 дБ), 8% (0.7 дБ) и 15% (1.4 дБ) соответственно. В скобках указаны различия точных и приближенных значений амплитуд мод в децибеллах. Ошибка на дистанции 1 км фактически определяется отличием точных значений ϕ_m на горизонте источника, задающих начальные амплитуды мод, от ВКБ-приближений данных функций, используемых в наших лучевых расчетах.

3. ЛУЧИ И МОДЫ ДЛЯ ПОЛЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЮ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Все приведенные в предыдущей главе результаты легко обобщаются на случай, когда поле задано уравнением Гельмгольца (1), и предположения о малости углов скольжения распространяющихся волн (и лучей) не делается. Здесь мы приводим соответствующие формулы с кратким комментарием.

Комплексная амплитуда поля вновь выражается через амплитуду A и эйконал S луча:

$$u = \frac{A}{\sqrt{r}} \exp(ikS). \quad (29)$$

Величины A и S могут быть выражены через параметры лучевых траекторий. Последние, как и раньше, будем обозначать $z(r)$. Для их описания вновь воспользуемся гамильтоновым формализмом. Лучевые уравнения, как и раньше, имеют форму уравнений Гамильтона (4), но сам гамильтониан равен теперь [16]

$$H = -\sqrt{n^2 - p^2} = -n \cos \chi. \quad (30)$$

Символ χ по-прежнему означает угол скольжения луча. Связь между импульсом и "скоростью" dz/dr теперь выглядит следующим образом:

$$p = n \frac{dz/dr}{\sqrt{1 + (dz/dr)^2}} = n \sin \chi. \quad (31)$$

Выражение для эйконала опять задается интегралом (5), но подставлять в него, разумеется, нужно уже новое выражение для гамильтониана. Формула (6) также остается в силе.

Аналог закона сохранения энергии в плоско-слоистом волноводе с $n = n(z)$, т.е. закон Снеллиуса [1], теперь имеет форму

$$H = -n(z) \cos \chi = E. \quad (32)$$

Связь между переменной действия и "энергией" определяется интегралом, аналогичным (8):

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dz = \frac{1}{\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \sqrt{n^2(z) - E^2}. \quad (33)$$

Поле точечного источника описывается уравнением Гельмгольца (1) с правой частью $-\frac{2}{r} \delta(r) \delta(z - z_0)$. Переписав известное выражение для амплитуды поля такого источника [1], в наших обозначениях, получаем приближенное решение уравнения Гельмгольца в виде

$$u = \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{r |E^{\nu} z_{p_0}^{\nu}|}} \exp[ikS^{\nu} - i\mu^{\nu} \pi/2], \quad (34)$$

где, как и в (11), верхний индекс ν нумерует все лучи, попадающие в точку (r, z) .

Теперь обратимся к модовому представлению поля. Собственные функции плоско-слоистого волновода являются решением уравнения

$$\frac{d^2 \phi_m}{dz^2} + k^2 [n^2(z) - E_m^2] \phi_m = 0$$

с соответствующими граничными условиями. Собственные значения вновь определяются правилом квантования (12), но связь между I_m и E_m теперь задается соотношением (33).

Собственную функцию между точками заворота вновь представим в виде суммы двух слагаемых в соответствии с формулами (13) и (14), но явные выражения для S_m , Q_m^{\pm} и D_m здесь принимают вид

$$S_m(z) = \int_{z_{\min}}^z dz p_m(z), \quad (35)$$

$$p_m = \sqrt{n^2 - E_m^2}, \quad (36)$$

$$Q_m^{\pm} = \sqrt{\frac{E_m}{p_m(z) D_m}} \exp(\pm i\phi_s/2), \quad (37)$$

$$D_m = 2E_m \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{p_m(z)}. \quad (38)$$

Модовое представление поля, как и в приближении параболического уравнения, запишем в виде суммы по локальным модам

$$u(r) = \sum_m B_m(r) \phi_m(r, z). \quad (39)$$

Следующим шагом является разложение лучевого представления поля (34) по локальным модам. При этом мы будем поступать точно также, как это делалось выше. Именно, вновь разобьем амплитуду моды B_m на два слагаемых и будем вычислять их с помощью метода стационарной фазы. При этом вновь придем к соотношениям (19)–(24) с тем лишь отличием, что в (19)–(21) ν следует заменить на m .

Подчеркнем то важное обстоятельство, что амплитуда моды вновь формируется вкладом лучей с переменными действия, удовлетворяющими условию (24).

Явное выражение для второй производной фазы по вертикальной координате определяется соотношением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k \left(\frac{p_{p_0}}{z_{p_0}} + \frac{\sigma \partial n^2 / \partial z}{2 p_m} \right) = \sigma \frac{k}{z_{p_0} p_m} E E_{p_0}.$$

Аналоги выражений (27) и (28) имеют вид

$$B_m^\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{k r n(r, z) \cos \chi D_m |H_{p_0}|}} \times \quad (40)$$

$$\times \exp[ik(S + \sigma S_m(z))] \exp[i(\gamma - 2\mu)\pi/4 + i\sigma\phi_s/2]$$

и

$$B_m^\sigma = \frac{1}{\sqrt{k r |E I_{p_0}|}} \times \quad (41)$$

$$\times \exp[ik(S + \sigma S_m(z))] \exp[i(\gamma - 2\mu)\pi/4 + i\sigma\phi_s/2].$$

Как и раньше, γ обозначает знак второй производной фазы по z в стационарной точке.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совокупность приведенных формул определяет процедуру расчета амплитуд мод в переменном по трассе волноводе на основе решения обычных лучевых уравнений. Во многом эта процедура аналогична стандартному геометрооптическому расчету амплитуды поля в заданной точке. Она включает выделение модовых лучей, имеющих на данной дистанции заданное значение переменной действия (аналог стандартной задачи прицеливания, то есть отыскания лучей, попадающих в заданную точку пространства), расчет параметров лучевых траекторий и их производных по начальным условиям. Как и в выражениях для амплитуд лучей (см. (11) и (34)), в формулах для амплитуд мод (27), (28), (40) и (41) знаменатели подынтегральных выражений могут обращаться в нуль. Таким образом, здесь имеются аналоги кустик. Подробнее об этом см. в работе [8]. Следует отметить, что область применимости данного подхода фактически совпадает с областью применимости лучевого приближения.

Полученные результаты позволяют глубже понять взаимосвязь между модовым и лучевым представлениями поля в неоднородном волноводе. Важный вывод заключается в том, что главную роль в формировании m -й моды на данной дистанции, согласно (24), играют модовые лучи, переменные действия которых равны переменной действия данной моды I_m . В плоскостом волноводе для каждой моды на каждой дистанции имеются

два модовых луча. Они выходят из источника под углами, равными углам скольжения двух волн Бриллюэна, формирующих данную моду. Вдоль своих модовых лучей мода в плоскостом волноводе складывается в фазе (конструктивно интерферирует) с соседними модами [17, 18].

В переменном по трассе волноводе число модовых лучей может быть любым [8]. В условиях лучевого хаоса это число экспоненциально растет с дистанцией, а зависимость амплитуды моды от расстояния становится нерегулярной. Обсуждаемый здесь подход, устанавливая неожиданно простую связь между лучами и модами в неоднородном волноводе, дает возможность глубже понять, каким образом хаотическое поведение лучевых траекторий может проявляться в суммарной волновой картине при конечной длине волны. Исследование этого вопроса составляет содержание проблемы волнового хаоса [16].

В качестве еще одного возможного приложения данного подхода укажем задачу исследования границ применимости адиабатического приближения. На основании результатов данной работы мы можем указать, как минимум, два механизма нарушения этого приближения. Один из них связан с несохранением переменной действия вдоль модового луча, а другой – с возможностью “размножения” числа модовых лучей. Оба механизма могут быть исследованы в рамках обсуждаемого здесь формализма. В частности, первый из них реализовался в рассмотренном выше примере. Вторым механизмом проявлялся в примере, рассмотренном в работе ([10]).

Авторы благодарны И.П. Смирнову, автору программы, использованной для расчета лучевых траекторий.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-17409).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховский Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
2. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. New York: American Institute of Physics, 1994.
3. Mignerey P.C. Environmentally adaptive wedge modes // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 1943–1952.
4. Colosi J.A., Flatte S.M. Mode coupling by internal waves for multimegahertz acoustic propagation in the ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. № 6. P. 3607–3620.
5. Tindle C.T., O'Driscoll, Higham C.J. Coupled mode perturbation theory of range dependence // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 108. № 1. P. 76–83.
6. Voronovich A.C., Shang E.C. Numerical simulations with horizontal – refraction – modal tomography. Part 1.

- Adiabatic propagation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1998. V. 104. P. 2636–2643.
7. Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M. Wave chaos in terms of normal modes // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 59. № 2. P. 1656–1668.
 8. Virovlyansky A.L. Manifestation of ray stochastic behaviour in a modal structure of the wave field // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2000. V. 108. № 1. P. 84–95.
 9. Berman G.P., Zaslavsky G.M. Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems // *Physica A.* 1979. V. 97. P. 367–382.
 10. Вировлянский А.Л., Лебедев О.В. Модовая структура поля в переменном по трассе волноводе Пеке-риса // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44. № 4. С. 451–455.
 11. Таннерт Ф.Д. Метод параболического уравнения. В кн.: *Распространение волн и подводная акустика* / Под ред. Келлера Дж.Б. и Пападакиса Дж.С. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. С. 180–226.
 12. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 264 с.
 13. Smith K.B., Tappert F.D. UMPE: The university of Miami parabolic equation model, Version 1.1, Marine Physical Laboratory Technical Memo 432 (Scripps Inst. of Oceanography, San Diego, 1994).
 14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. М.: Наука, 1973.
 15. Окомелькова И.А., Шерешевский И.А. Расчет нормальных волн в слоистой среде. Горький: Пре-принт ИПФ АН СССР № 235, 1989. 36 с.
 16. Абдуллаев С.С., Заславский Г.М. Классическая не-линейная динамика и хаос лучей в задачах распро-странения волн в неоднородных средах // *УФН.* 1991. Т. 161. № 8. С. 1–43.
 17. Tindle C.T., Guthrie K.M. Rays as interfering modes in underwater acoustics // *J. Sound. Vib.* 1974. V. 34. P. 291–295.
 18. Felsen L.B. Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1981. V. 69. № 2. P. 352–361.

Ray Approach for Analyzing the Mode Structure of the Sound Field in a Range-Dependent Waveguide

A. L. Virovlyanskii, L. Ya. Lyubavin, and A. A. Stromkov

Simple ray-approximation formulas are obtained for the mode amplitudes in a waveguide with range-dependent parameters. The idea of the proposed approach is based on the mode expansion of the complex field amplitude determined using the geometrical-optics approximation. A specific example of calculating the mode amplitudes is analyzed for a deep-water sound channel with a sound speed profile nonadiabatically varying with distance. The results of the calculation are compared with the numerical solution obtained for the same problem by the parabolic equation method.

Волновод с параметрами, зависящими от дальности, рассматривается с помощью метода приближения лучей. Получены простые формулы для амплитуд мод. Идея предлагаемого подхода основана на разложении комплексной амплитуды поля в моды, определенную с помощью приближения геометрической оптики. Конкретный пример расчета амплитуд мод анализируется для глубоководного звукового канала с профилем скорости звука, изменяющимся неадиабатически с дальностью. Результаты расчета сравниваются с численным решением той же задачи, полученным методом параболического уравнения.

Подобные результаты могут быть получены для волноводов с другими профилями скорости звука. В работе использованы методы, описанные в [1–4]. В работе использованы методы, описанные в [1–4]. В работе использованы методы, описанные в [1–4].