

УДК 534.23

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2001 г. А. В. Зацерковный, В. А. Сергеев, Б. П. Шарфарец

Институт прикладной математики ДВО РАН
690007 Владивосток, ул. Радио 3Военно-морская академия им. Н.Г. Кузнецова
197045 Санкт-Петербург, Выборгская набережная 73/1
E-mail: sharg@mail.rcom.ru

Поступила в редакцию 27.10.97 г.

Рассмотрена задача о дифракции акустической волны на рассеивателе (включении) конечных размеров, находящемся в полупространстве. Метод решения основывается на использовании амплитуды рассеяния включения. Приведена формула, аналогичная формуле Грина, позволяющая получить амплитуду рассеяния включения, отвечающую произвольной падающей волне (заданной диаграммой направленности излучателя первичных волн) по амплитуде рассеяния, отвечающей плоским падающим волнам. Приведен алгоритм решения задачи о работе акустически непрозрачного излучателя в полупространстве с границей, характеризуемой произвольным коэффициентом отражения. В качестве примера решена задача об излучении низкочастотных колебаний сферой с акустически мягкой границей вблизи акустически жесткой и мягкой границы полупространства.

Библиография по задачам рассеяния весьма обширна. Упомянем лишь некоторые работы, имеющие отношение к рассеянию звука в акустических волноводах [1–7], в которых применяются численные либо асимптотические методы решения. В работе [17] решается плоская задача рассеяния, сформулированная в виде регулярных интегральных уравнений. В работе [18] также исследуется двумерная задача рассеяния на произвольном теле, находящемся вблизи импедансной границы. Задача решается методом граничных элементов. В работе [19] получено трехмерное решение задачи рассеяния на упругих телах, находящихся вблизи границы двух однородных полупространств, одно из которых жидкое, другое – упругое. Задача решается с применением метода T -матриц, который, несмотря на свою громоздкость, все же носит приближенный характер. В настоящей работе для решения задач рассеяния в ограниченных средах используется расширение области определения амплитуды рассеяния на всю комплексную плоскость углов падения, и техника, с этим связанная, изложенная, например, в работах [8–10]. Получена формула, аналогичная формуле Грина, позволяющая найти амплитуду рассеяния включения, отвечающую произвольной падающей волне (заданной диаграммой направленности (д.н.) излучателя первичных волн) по амплитуде рассеяния, отвечающей плоским падающим волнам.

Приведен алгоритм решения задачи о работе акустически непрозрачного излучателя в полупространстве с границей, характеризуемой произ-

вольным коэффициентом отражения. В качестве примера решена задача об излучении низкочастотных колебаний сферой с акустически мягкой поверхностью вблизи акустически жесткой и мягкой границы полупространства.

Рассмотрим задачи о стационарном рассеянии на объемном и поверхностном рассеивателе в R^3 . Пусть задана ограниченная область $E \in R^3$ с границей $\partial E = S$. Объемный рассеиватель определяется возмущением показателя преломления внутри области E (для упрощения изложения полагаем, что плотность среды в E постоянна и совпадает с плотностью среды окружающего однородного пространства R^3). Поверхностный рассеиватель будем характеризовать граничными условиями на S .

Полное поле U представим в виде суммы падающего U_0 и рассеянного U_S полей. Источником падающего поля может служить либо излучатель, сосредоточенный в области B , не совпадающей в общем случае с областью E , либо плоская волна, приходящая из бесконечности [11, 12]. Например, в случае объемного рассеивателя, когда источником падающего поля служит излучатель с объемной плотностью F , $\text{supp} F = B$, справедливо следующее выражение (когда $F = 0$, источником падающего поля служит приходящая из бесконечности плоская волна):

$$\Delta U + k^2 U = -V(x)U + F, \quad x \in R^3, \quad (1)$$

$$\text{supp} V = E, \quad \text{supp} F = B$$

$$U_S(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}),$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial |\mathbf{x}|} - jkU_S = o(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Здесь $V(\mathbf{x}) = k^2(n^2 - 1)$, где n – показатель преломления в области E ; в области $R^3 \setminus E$ $n(\mathbf{x}) \equiv 1$; k – волновое число.

Падающее поле U_0 может условию (2) и не удовлетворять (например, плоская волна). Аналогично, для поверхностного рассеивателя, когда источником падающего поля служит плоская волна, приходящая из бесконечности, имеем:

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad \mathbf{x} \in R^3 \setminus E, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(\mathbf{x}); \quad U(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4)$$

причем U_S вновь удовлетворяет (2). Здесь функции $\alpha(\mathbf{x})$ и $\beta(\mathbf{x})$ связаны интегральным уравнением, следующим из формулы Кирхгофа [11]

$$\beta(\mathbf{x}) = \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) - \beta(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}),$$

где G определено ниже.

Решение задачи (1)–(2) при $F \equiv 0$ может быть представлено (с помощью формулы Грина) в виде

$$U(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \int_E V(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in R^3 \quad (5)$$

(см., например, [11]). Решение задачи (3)–(4)–(2) допускает представление в виде

$$U(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \int_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - U(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right] dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \notin E \quad (6)$$

(см. [11]).

В (5), (6) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(jk|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$; \mathbf{n} – внутренняя нормаль к S . Выражения (5), (6) представляют собой интегральные уравнения для нахождения результирующего поля $U(\mathbf{x})$.

Из (5), (6), используя технику, изложенную в [8], можем выразить поле рассеяния через функцию T_i :

$$U_S^i(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{T_i(\xi)}{\alpha(\xi)} \exp(j\mathbf{k}_i \mathbf{x}) d\xi, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь $i = 1$ для верхнего и $i = 2$ для нижнего полупространств,

$\xi = (k_x, k_y) \in R^2$; $\mathbf{k}_i = (k_x, k_y, (-1)^i \alpha(k_x, k_y))$; $d\xi = dk_x dk_y$; $\alpha(k_x, k_y) = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, причем рассматривается та ветвь корня, для которой $\text{Re}(\alpha) \geq 0$.

T_i можно определить с помощью формулы

$$T_i(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_E V(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}) \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (8)$$

$$T_i(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} + j(\mathbf{k}_i \mathbf{n}) U(\mathbf{y}) \right] \times \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) dS(\mathbf{x}), \text{ где } \mathbf{y} \in S \quad (9)$$

соответственно для объемного рассеивателя и для поверхностного.

В теории рассеяния функцию T_i , определенную в области $|\xi| \in [0, k]$ (так называемая область видимости, когда угол падения $\theta \in [0, \pi]$), называют амплитудой рассеяния, либо диаграммой рассеяния (см., например, [11, 12]). Функцию T_i , определенную

в области $|\xi| \in [0, \infty)$ (угол падения $\theta \in [0, \frac{\pi}{2} - j\infty)$),

также будем называть амплитудой рассеяния (а р). Необходимость расширения области определения функции следует из (7). Расширение области определения а р рассеивателя до $|\xi| \in [0, \infty)$, что эквивалентно $\theta \in [0, \frac{\pi}{2} - j\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ в полярной

системе координат, необходимо для корректного описания поля рассеяния (7). Естественно, T_i зависит от падающей волны. В этом смысле особый интерес представляет а р, отвечающая плоской падающей волне, так как а р рассеивателя, отвечающая произвольной падающей волне, может быть выражена через д н падающей волны и а р рассеивателя, отвечающую плоским падающим волнам. Чтобы показать это, рассмотрим в качестве падающей волну $U_0 = \exp(j(\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x}))$ (это амплитуда плоской волны, фронт которой нормален к вектору \mathbf{k}_{pm}). Здесь индекс p отмечает то, что – это падающая волна, индекс m соответствует направлению распространения этой волны по отношению к оси Oz : если плоская волна распространяется в сторону увеличения z , то $m = 1$, если в сторону уменьшения, то $m = 2$. Ясно, что $\mathbf{k}_{p1} = (\xi_p, \alpha_p)$, $\mathbf{k}_{p2} = (\xi_p, -\alpha_p)$. Таким образом, волна U_0 , характеризующаяся вектором \mathbf{k}_{p1} , падает на рассеиватель сверху вниз (ось Oz направлена вниз), а вектором \mathbf{k}_{p2} – снизу вверх.

А р, отвечающую волне U_0 , обозначим $T_i^m(\xi_p, \xi_s)$ (аналогичную функцию в квантовой механике называют матрицей рассеяния [13, с. 893]). Таким образом, $T_i^m(\xi_p, \xi_s)$ есть а р в случае, когда падающая волна характеризуется вектором \mathbf{k}_{pm} , а рассеянная волна рассматривается в полупространстве, лежащем выше ($i = 1$), либо ниже ($i = 2$) рассеивате-

ля в R^3 . Рассеянные плоские волны характеризуются векторами $\mathbf{k}_{s1} = (\xi_s, -\alpha_s)$, $\mathbf{k}_{s2} = (\xi_s, \alpha_s)$ соответственно для верхнего или нижнего полупространства в R^3 относительно рассеивателя (отметим, что в (8) фигурируют именно эти векторы).

С физической точки зрения смысл функции T_i^m таков: когда на вход системы поступает волна с вектором \mathbf{k}_p , на выходе образуется сумма плоских волн с векторами \mathbf{k}_s .

Представим произвольное падающее поле источника, находящегося в начале координат, через U_0 и источника [8]:

$$U_{0m}(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\xi)}{\alpha(\xi)} \exp(j(\mathbf{k}_m \mathbf{x})) d\xi, \quad (10)$$

$m = 1, 2.$

Введем операторы:

$$A^v U = \int_E V(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

$$A^s U = \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - U(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right] ds(\mathbf{y}),$$

$$B_i^v U = \frac{1}{4\pi} \int_E V(\mathbf{y}) U(\mathbf{y}) \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

$$B_i^s U = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} + j(\mathbf{k}_i \mathbf{n}(\mathbf{y})) (U(\mathbf{y})) \right] \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}).$$

Индекс $v(s)$ указывает на рассматриваемый тип рассеяния – объемное (поверхностное). Из (5)–(6) имеем (индексы v, s опускаем): $(I - A)U = U_0$, $U =$

$= (I - A)^{-1}U_0$, причем оператор $(I - A)^{-1}$ является интегральным, и свойства его ядра допускают следующие операции. Из (8)–(9) следует, что

$$T_i = B_i U = B_i (I - A)^{-1} U_0. \quad (11)$$

Теперь, воспользовавшись представлением (10) для U_0 , получим:

$$T_i(\xi_s) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\xi_p)}{\alpha(\xi_p)} B_i (I - A)^{-1} \exp(j\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x}) d\xi_p;$$

но из (11) следует, что $T_p^m(\xi_p, \xi_s) = B_i (I - A)^{-1} \exp(j\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x})$. Значит,

$$T_i(\xi_s) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\xi_p)}{\alpha(\xi_p)} T_i^m(\xi_p, \xi_s) d\xi_p, \quad (12)$$

$i, m = 1, 2.$

Отсюда видно, что матрица рассеяния имеет в теории рассеяния то же значение, что и функция Грина в теории краевых задач. Если функция Грина есть поле точечных источников и по ней можно восстановить поле произвольного источника, то матрица рассеяния есть a, p рассеивателя, отвечающая плоским падающим волнам и по ней можно определить a, p для произвольной падающей волны.

После того как a, p рассеивателя, отвечающая данной падающей волне, найдена, поле рассеяния может быть получено из (7), но проще воспользоваться разложением поля по степеням $1/kR$ (см. [9]):

$$U_s(\mathbf{x}) = \frac{\exp(jkR)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T'_n(\vartheta, \varphi)}{(kR)^n}, \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T'_0(\pi - \vartheta, \varphi) &= T_1(\xi) \\ T'_0(\vartheta, \varphi) &= T_2(\xi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \xi &= (k \sin \vartheta \cos \varphi, k \sin \vartheta \sin \varphi), \\ \vartheta &\in [0, \pi/2 - j\infty], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (14)$$

T'_n для $n > 0$ получаются из T'_0 с помощью рекуррентного соотношения (см. [9]).

Применим рассмотренную технику для решения следующей задачи: пусть в однородное полупространство помещен акустически непрозрачный излучатель, заданный областью E , диаграммой направленности $D_i(\xi)$ и матрицей рассеяния $T_i^m(\xi_p, \xi_s)$. Отражающая граница $z = 0$ характеризуется коэффициентом отражения $V(\xi)$. Источник E излучает волну U_0 . Обозначим U_0^i сужение U_0 на Ω_i , $i = 1, 2$. $\Omega_1 = \{(\mathbf{x}, y) \in R^2, z \leq z_0\}$, $\Omega_2 = \{(\mathbf{x}, y) \in R^2, z \geq z_0\}$, z_0 – ордината центра излучателя.

U_0^i могут быть выражены через $D_i(\xi)$ (см. [11]):

$$U_0^i(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_i(\xi) \exp(j(-1)^i \alpha(\xi)(z - z_0))}{\alpha(\xi)} \exp(j\xi r) d\xi. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$. Фазовая добавка $\exp[j(-1)^i \alpha(\xi)(z - z_0)]$ обусловлена тем, что D_i рассчитана для положения излучателя с началом координат в $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$ (см. [8]). Прямая волна U_0^2 не

вызовет рассеянной волны, так как она сразу уходит от источника в нижнее полупространство Ω_2 .

Другое дело – волна U_0^1 . Дойдя до границы $z = 0$, она отражается и идет вниз в Ω_2 , вызвав попутно рассеянные на E волны, идущие вверх (в Ω_1) и вниз (в Ω_2). Первичная рассеянная вверх волна отражается от границы $z = 0$, идет вниз, вызывая вторичное рассеяние вверх и вниз и так далее. Для того чтобы найти поле в $\Omega_i, i = 1, 2$, необходимо просуммировать все многократно рассеявшиеся на E и отразившиеся от границы волны.

Введем операторы

$$A_2^i[D_1](\xi_s) = \int_{R^2} T_2^i(\xi_p, \xi_s) \exp[2j\alpha(\xi_p)z_0] V(\xi_p) \frac{D_1(\xi_p)}{\alpha(\xi_p)} d\xi_p. \quad (16)$$

Здесь $T_2^i(\xi_p, \xi_s)$ – матрица рассеяния излучателя E в случае, когда плоская волна падает сверху вниз на E и рассеивается вверх ($i = 1$) либо вниз ($i = 2$). Суммируя все многократно рассеянные волны, нетрудно получить результирующее поле в Ω_i в виде

$$U^1(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_2^1)^n [D_1](\xi_s) [\exp(-j(z-z_0)\alpha(\xi_s)) + V(\xi_s) \exp(j(z+z_0)\alpha(\xi_s))] \frac{\exp(j\xi_s \mathbf{r})}{\alpha(\xi_s)} d\xi_s, \quad (17)$$

$\mathbf{x} \in \Omega_1$

$$U^2(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (A_2^2)^n [D_1](\xi_s) V(\xi_s) \times \exp(j(z+z_0)\alpha(\xi_s)) + \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_2^2 (A_2^1)^n [D_1](\xi_s) + D_2(\xi_s) \right] \times \exp(j(z-z_0)\alpha(\xi_s)) \right] \frac{\exp(j\xi_s \mathbf{r})}{\alpha(\xi_s)} d\xi_s. \quad (18)$$

$\mathbf{x} \in \Omega_2$

Операторные ряды в (17), (18) сходятся, если норма оператора A_2^1 меньше единицы, что без труда показывается из энергетических соображений. Введем обозначения:

$$\tilde{T}_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_2^1)^n [D_1](\xi), \quad \tilde{T}_2(\xi) = A_2^2 [\tilde{T}_1](\xi). \quad (19)$$

Сворачивая операторный ряд Неймана в (19), имеем

$$\tilde{T}_1(\xi) = (I - A_2^1)^{-1} [D_1](\xi). \quad (20)$$

Обращая (20), получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$(I - A_2^1) [\tilde{T}_1](\xi) = D_1(\xi), \quad (21)$$

которое может быть разрешено стандартными средствами. С учетом (19), перепишем (17), (18) в более компактном виде:

$$U^1(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \tilde{T}_1(\xi_s) [\exp(-j(z-z_0)\alpha(\xi_s)) + V(\xi_s) \exp(j(z+z_0)\alpha(\xi_s))] \frac{\exp(j\xi_s \mathbf{r})}{\alpha(\xi_s)} d\xi_s, \quad (22)$$

$$U^2(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \tilde{T}_1(\xi_s) V(\xi_s) [\exp(j(z+z_0)\alpha(\xi_s)) + [\tilde{T}_2(\xi_s) + D_2(\xi_s)] \exp(j(z-z_0)\alpha(\xi_s))] \times \frac{\exp(j\xi_s \mathbf{r})}{\alpha(\xi_s)} d\xi_s. \quad (23)$$

Как видно из (22), (23), введенные функции T_i можно трактовать как n и некоторого эквивалентного данному прозрачного излучателя. По структуре (22), (23) видно, что поле формируется действительными и мнимыми источниками. Совпадение с классическим видом будет полным, если в частном случае принять $D_1 \equiv D_2, A_2^2 = A_2^1$. Тогда, как видно из (18), предэкспонента при $\exp(j(z-z_0)\alpha)$ превратится в T_1 . Если теперь применить метод построения рядов типа (13), изложенный в [9], то получим поле в рассматриваемом полупространстве в виде

$$U_s(\mathbf{x}) = \frac{\exp(jkR)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{1n}(\vartheta, \varphi)}{(kR)^n} + \frac{\exp(jkR')}{R'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{2n}(\vartheta', \varphi')}{(kR')^n}. \quad (24)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} D_{1.0}(\pi - \vartheta, \varphi) &= \tilde{T}_1(\xi) \\ D_{1.0}(\vartheta, \varphi) &= \tilde{T}_2(\xi) + D_2(\xi) \\ D_{2.0}(\vartheta, \varphi) &= \tilde{T}_1(\xi) V(\xi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\vartheta, \vartheta' \in \left[0, \frac{\pi}{2} - j^\infty\right], \\ &\varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Старшие члены определяются из рекуррентного соотношения [10]

$$D_{1,n+1}(\vartheta, \varphi) = \frac{\Delta_{\vartheta, \varphi} + n(n+1)}{2j(n+1)} D_{1,n}(\vartheta, \varphi),$$

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Координаты (R, ϑ, φ) и $(R', \vartheta', \varphi')$ характеризуют положение x относительно действительного и мнимого источника.

Вычислим поле в следующем простом случае.

В однородном полупространстве с плоской границей, характеризующейся коэффициентом отражения $V(\xi) \equiv 1$ (жесткая) либо $V(\xi) \equiv -1$ (мягкая), находится сфера радиуса R_0 с центром в точке $x_0 = (0, 0, z_0)$, на поверхности которой выполняется условие Дирихле. Кроме того, плотность источников звука, равномерно распределенных на поверхности сферы, такова, что $D_1 = D_2 \equiv 1$. Матрица рассеяния такой сферы в низкочастотном приближении (с точностью до $O(k^3)$, в полярных координатах выглядит следующим образом [11, с. 86]:

$$T(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0) = A + B \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (25)$$

$$A = -R_0 + \frac{2}{3} k^2 R_0^3 + jkR_0^2, \quad B = -k^2 R_0^3.$$

Подставляя (16) в (21) и переходя к сферической системе координат, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$a_1(c_1) = \frac{\frac{2\pi k A}{\alpha} e^\alpha \pm \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha}}{1 \mp \frac{2\pi k}{\alpha} A e^\alpha \pm \frac{2\pi k B}{\alpha^3} e^\alpha (\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha}},$$

$$a_2(c_2) = \frac{\frac{2\pi k}{\alpha^2} B e^\alpha (1 - \alpha)}{1 \mp \frac{2\pi k}{\alpha} A e^\alpha \pm \frac{2\pi k B}{\alpha^3} e^\alpha (\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha}},$$

$$a_3 = c_3 = a_4 = c_4 = 0; \quad \alpha = j2kz_0 \quad (28)$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует жесткому (мягкому) дну. Коэффициенты a_3, c_3, a_4, c_4 обращаются в нуль точно, что является следствием азимутальной симметрии задачи.

Подставляя выражения для a_1, a_2, c_1, c_2 в (27), получаем низкочастотное приближение для a р \tilde{T}_1 ; функция \tilde{T}_2 может быть вычислена из (19) через \tilde{T}_1 следующим образом:

$$\tilde{T}_1(\vartheta, \varphi) \mp$$

$$\mp k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [A + B(-\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \times \cos(\varphi - \varphi_0)] \exp(j2k \cos \vartheta_0 z_0) \times \sin \vartheta_0 \tilde{T}_1(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0 = 1. \quad (26)$$

Здесь знаком минус перед $\cos \vartheta$ учитывается тот факт, что рассматривается матрица рассеяния T_2^1 ; знаки \mp перед интегралом соответствуют жесткому (верхний знак) и мягкому (нижний знак) дну соответственно. Отметим, что (26) есть интегральное уравнение с вырожденным ядром. Следовательно, решения необходимо искать в виде [12]

$$\tilde{T}_1(0, \varphi) = 1 + a_1 + a_2 \cos \vartheta + a_3 \sin \vartheta \cos \varphi + a_4 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (27)$$

$$\tilde{T}_1(0, \varphi) = 1 - c_1 - c_2 \cos \vartheta - c_3 \sin \vartheta \cos \varphi - c_4 \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (27')$$

Здесь $a_i(c_i)$ характеризуют жесткую (мягкую) границы соответственно. Коэффициенты $a_i, c_i, i = 1, 4$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой из (26) стандартным образом. Окончательное решение имеет вид

$$\tilde{T}_2(\vartheta) = 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A + B \cos \vartheta \cos \vartheta_0) \times \exp(\alpha \cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \tilde{T}_1(\vartheta_0) d\vartheta_0. \quad (29)$$

Здесь все члены, содержащие угол φ , как и выше, равны нулю вследствие азимутальной сим-

метрии задачи. Вычисление (29) дает для жесткого дна

$$\tilde{T}_2(\vartheta) = 2\pi k \left\{ A(1+a_1) \frac{e^\alpha}{\alpha} + [Aa_2 + B(1+a_1)\cos\vartheta] \times \right. \\ \left. \times \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(\alpha-1) + Ba_2 \cos\vartheta \frac{e^\alpha}{\alpha^3}(\alpha^2-2\alpha+2) \right\} \quad (30)$$

и для мягкого дна

$$\tilde{T}_2(\vartheta) = 2\pi k \left\{ A(1-c_1) \frac{e^\alpha}{\alpha} + [A(-c_2) + B(1-c_1)\cos\vartheta] \times \right. \\ \left. \times \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(\alpha-1) + B(-c_2) \cos\vartheta \frac{e^\alpha}{\alpha^3}(\alpha^2-2\alpha+2) \right\}. \quad (30')$$

Подставляя (27) и (30), с учетом (28), в (24), получим полное поле. При этом следует учесть, что

$$\left. \begin{aligned} D_{1,0}(\pi-\vartheta) &= \tilde{T}_1(\vartheta) \\ D_{1,0}(\vartheta) &= \tilde{T}_2(\vartheta) + 1 \\ D_{2,0}(\vartheta) &= \tilde{T}_1(\vartheta)V(\vartheta) \end{aligned} \right\} \vartheta \in [0, \pi/2]. \quad (31)$$

Здесь $V(\vartheta) \equiv 1$ либо $V(\vartheta) \equiv -1$ соответственно для абсолютно жесткой и мягкой границ.

На рис. 1–3 приведены результаты расчета амплитуды звукового поля U с учетом рассеяния при различных значениях глубины источника (рассеивателя), а также радиуса последнего. В качестве независимой переменной при построении графиков использовалось горизонтальное расстояние между источником и приемником. Поле рассчитывалось по выражению (24), где учитывались только первые члены рядов ($n=0$). Текущие значения углов ϑ и ϑ' определялись из геометрии задачи.

Соответствующие значения $D_{1,0}(\vartheta)$ и $D_{2,0}(\vartheta')$ рассчитывались из выражений (31), (27) и (30). Индекс 0 соответствует жесткой границе, индекс 1 – мягкой.

Для сравнения здесь же представлены аналогичные зависимости $P(x)$, полученные методом мнимых источников (без учета рассеяния). Все расчеты выполнены для частоты 100 Гц и глубины приемника 105 метров. Значения по вертикальной оси пронормированы значением амплитуды поля того же источника на единичном расстоянии в однородном безграничном пространстве.

Анализ представленных графиков показывает, что эффект рассеяния поля на источнике оказывает существенное влияние на полное звуковое поле, причем наиболее заметно этот эффект про-

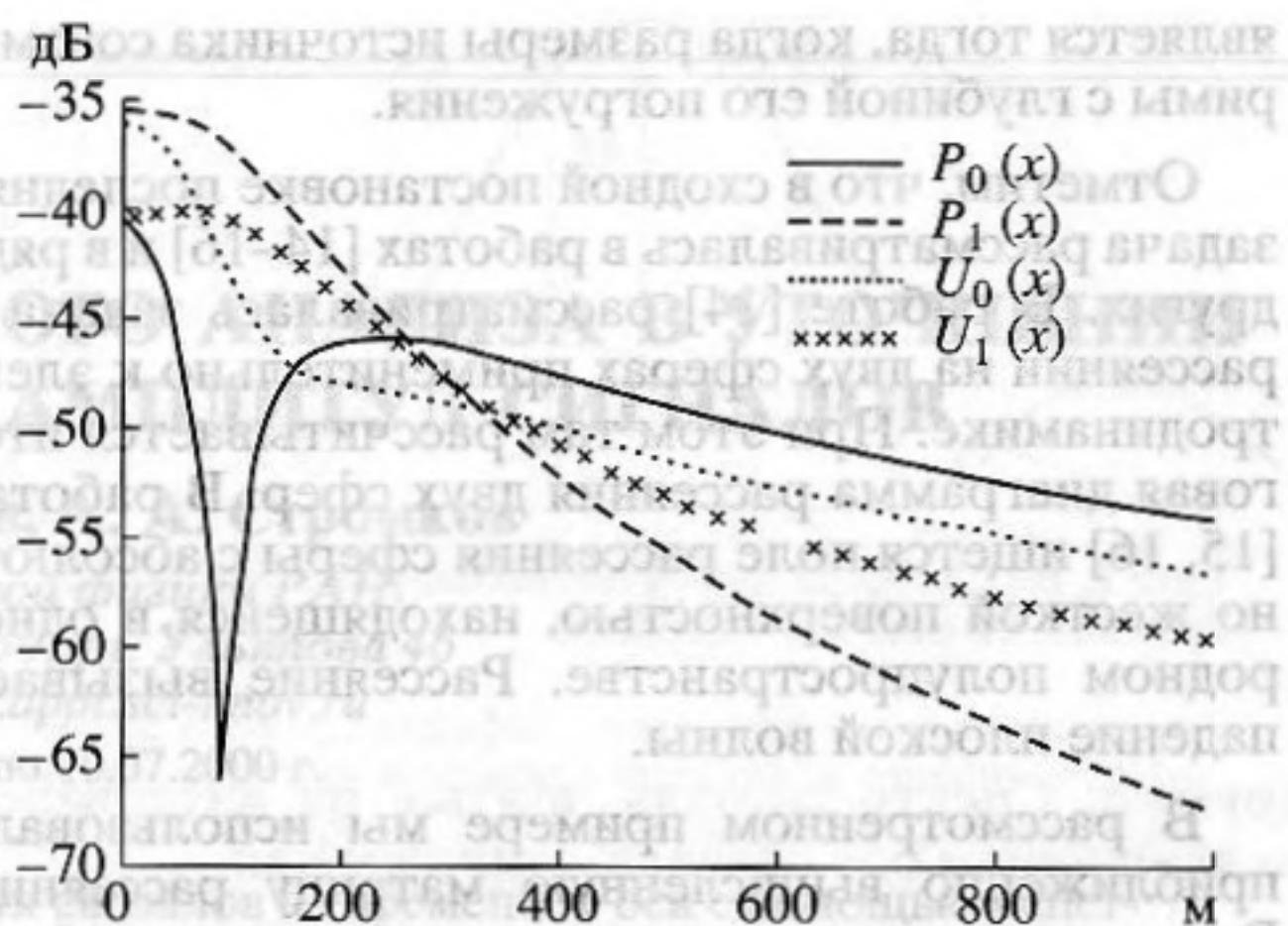


Рис. 1. Зависимость амплитуды звукового поля от расстояния с учетом и без учета эффекта рассеяния: $R_0 = 4$ м, $Z_0 = 5$ м.

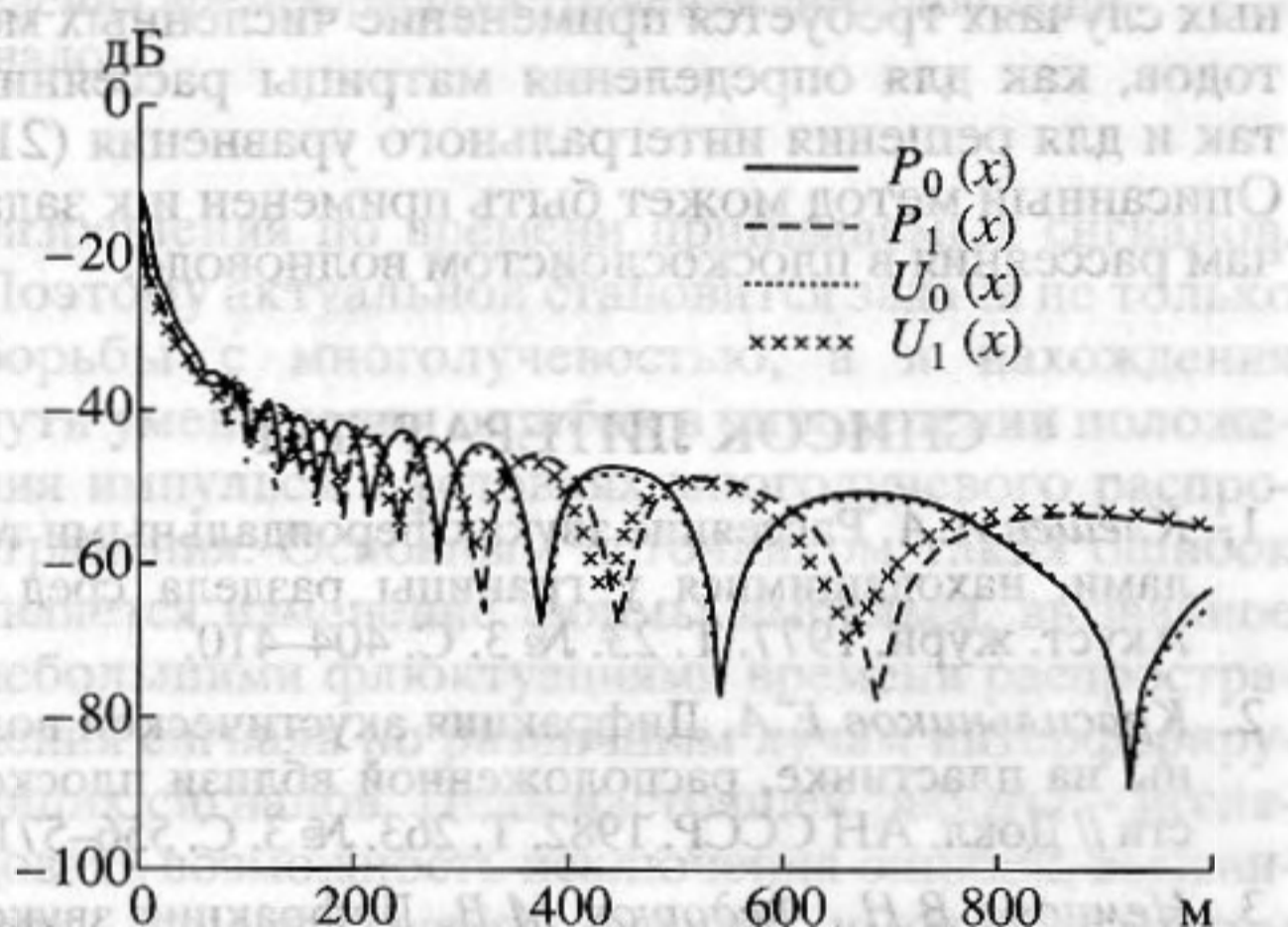


Рис. 2. Зависимость амплитуды звукового поля от расстояния с учетом и без учета эффекта рассеяния: $R_0 = 4$ м, $Z_0 = 100$ м.

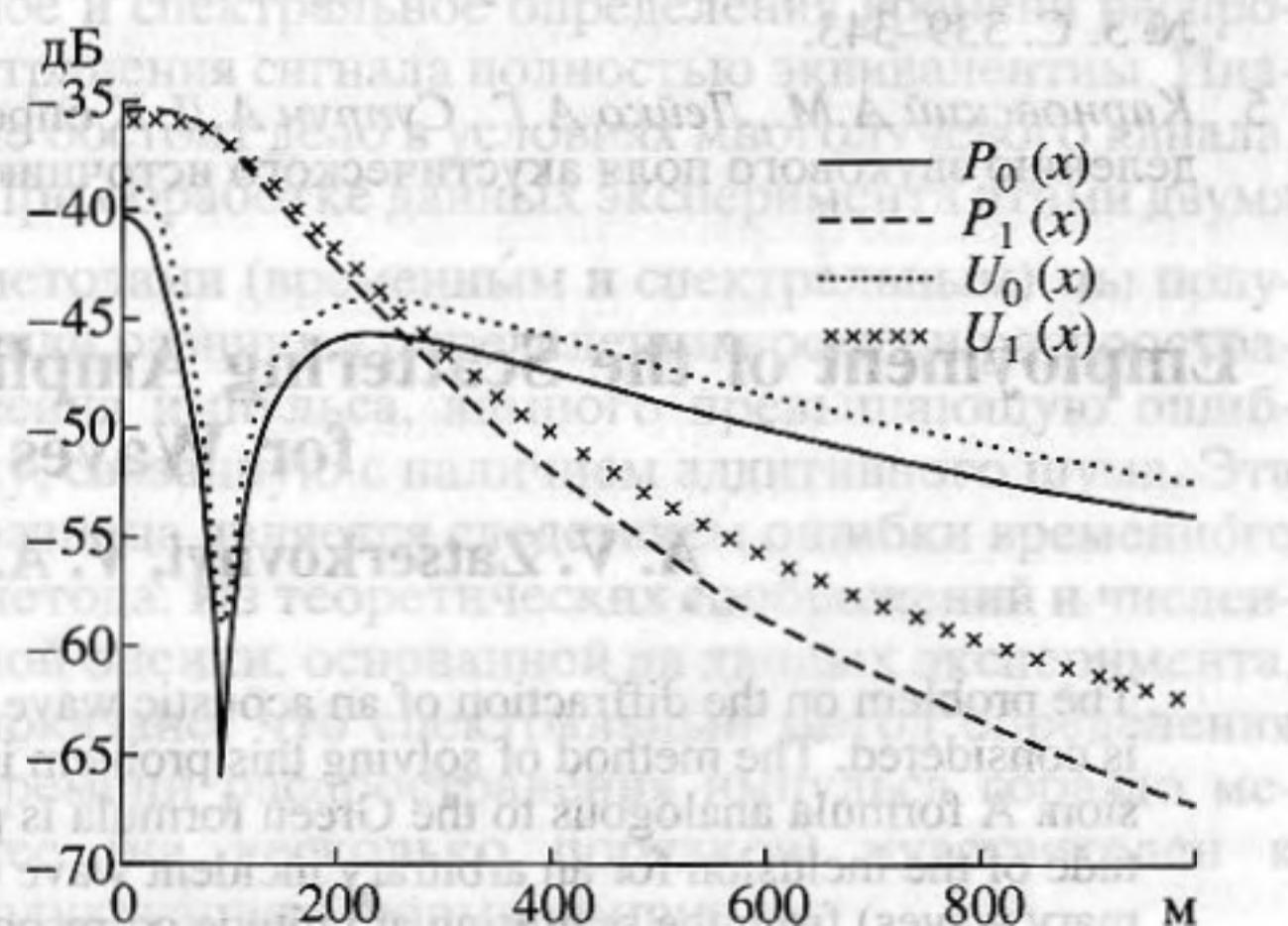


Рис. 3. Зависимость амплитуды звукового поля от расстояния с учетом и без учета эффекта рассеяния: $R_0 = 0.4$ м, $Z_0 = 5$ м.

является тогда, когда размеры источника соизмеримы с глубиной его погружения.

Отметим, что в сходной постановке последняя задача рассматривалась в работах [14–16] и в ряде других. В работе [14] рассматривалась задача о рассеянии на двух сферах применительно к электродинамике. При этом там рассчитывается итоговая диаграмма рассеяния двух сфер. В работах [15, 16] ищется поле рассеяния сферы с абсолютно жесткой поверхностью, находящейся в однородном полупространстве. Рассеяние вызывает падение плоской волны.

В рассмотренном примере мы использовали приближенно вычисленную матрицу рассеяния. В плоском случае матрица рассеяния может быть вычислена точно для большого класса рассеивателей с помощью метода Виннера–Хопфа, так как она является преобразованием Фурье от поля рассеяния плоской падающей волны. В более сложных случаях требуется применение численных методов, как для определения матрицы рассеяния, так и для решения интегрального уравнения (21). Описанный метод может быть применен и к задачам рассеяния в плоскостром волноводе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клещев А.А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 404–410.
2. Красильников Е.А. Дифракция акустической волны на пластинке, расположенной вблизи плоскости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 556–571.
3. Немцова В.Н., Федорюк М.В. Дифракция звуковых волн на тонком теле вращения в двухслойной жидкости // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 47–51.
4. Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г. Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 339–343.
5. Карновский А.М., Лейко А.Г., Супрун А.Д. К определению звукового поля акустического источника

- конечных размеров в присутствии границы раздела // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 880–886.
6. Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И. Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 4. С. 548–560.
7. Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И. Дифракция звукового поля на плоском прямоугольном вертикальном экране в волноводе // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 249–253.
8. Шарфарец Б.П. Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 119–125.
9. Шарфарец Б.П. Геометрооптическое представление поля направленного излучателя в неоднородных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 738–742.
10. Косырев Б.А., Шарфарец Б.П. Поле протяженного источника в нерегулярных океанических волноводах. Препринт. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1991. 46 с.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1960. Т. 2. 860 с.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981. 512 с.
13. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. 1216 с.
14. Иванов Е.А. Дифракция на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
15. Gaunard J.C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. № 4. P. 2526–2536.
16. Gaunard J.C., Huang H. Sound scattering by a spherical object near a hard Flat Bottom // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control, 1996. V. 43. № 4. P. 690–700.
17. Yang S.A. A boundary integral equation method for two-dimensional acoustic scattering problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 1. P. 93–105.
18. Martin Ochmann. The full-field equations for acoustic radiation and scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 5. P. 2557–2564.
19. Bishop G.C. Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 1. P. 130–143.

Employment of the Scattering Amplitude in Solving the Diffraction Problems for Waves in a Halfspace

A. V. Zatserkovnyi, V. A. Sergeev, and B. P. Sharfarets

The problem on the diffraction of an acoustic wave by a finite-size scatterer (inclusion) located in a halfspace is considered. The method of solving this problem is based on the use of the scattering amplitude of the inclusion. A formula analogous to the Green formula is presented. It allows one to determine the scattering amplitude of the inclusion for an arbitrary incident wave (determined by the directional pattern of the source of primary waves) from the scattering amplitude corresponding to plane incident waves. The algorithm is presented for solving the problem on the operation of an acoustically opaque radiator in a halfspace whose boundary is characterized by an arbitrary reflection coefficient. As an example, the problem is solved on the generation of low-frequency oscillations by a sphere with an acoustically soft boundary near an acoustically hard or soft boundary of the halfspace.