

УДК 621.396

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ И РАССЕЙАНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 2001 г. В. М. Кузькин

Научный центр волновых исследований Института общей физики РАН

117942 Москва, ул. Вавилова 38

E-mail: gera@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 22.01.01 г.

Сформулированы условия применимости понятия диаграммы направленности (амплитуды рассеяния) в задачах волноводного распространения. Рассмотрение базируется на решении задачи Штурма–Лиувилля. Обсуждены результаты сравнения этих условий с аналогичными условиями, полученными ранее в лучевом приближении. На основе предложенных условий модифицировано выражение для матрицы рассеяния волноводных мод в величинах, определяемых при решении уравнения Шредингера. Это позволяет при проведении численных расчетов использовать результаты многочисленных работ по распространению в неоднородных волноводах и дифракции на телах в свободном пространстве, имеющих сложное строение.

Как в науке, так и в особенности в инженерной практике часто возникает стремление распространить привычные понятия и методы за пределы их законной применимости. Не удивительно, что и в данном вопросе – об излучении звука протяженными антеннами и рассеянии звука телами в океанических волноводах – появились и появляются многочисленные работы, направленные к тому, чтобы описать эти явления в рамках привычных понятий, принятых в свободном пространстве. Поскольку было сразу же ясно, что в неоднородных волноводах концепция диаграммы направленности (амплитуды рассеяния) имеет ограниченную область применимости, усилия были направлены к тому, чтобы решить задачу приближенно и установить границы применимости соответствующих приближений. В рамках ВКБ-приближения такая задача рассмотрена в работах [1–3].

В настоящей статье развиваются результаты указанных выше работ. Обсуждаются условия применимости понятия локально-однородной среды в многомодовом плоскостром волноводе на основе решения задачи Штурма–Лиувилля. (Под локально-однородной средой с характерным вертикальным размером ρ условимся далее понимать неоднородную среду, в пределах слоя толщины ρ которой нормальные волны можно считать квазиплоскими. Если апертура антенны или вертикальный размер тела не превышают толщины такого квазиоднородного слоя, то диаграмма направленности (амплитуда рассеяния) является адекватной характеристикой излучения (рассеяния) в стратифицированном волноводе.) Проведено сравнение этих условий с аналогичными условиями, полученными ранее в лучевом приближе-

нии. С использованием этих условий предложено модифицированное выражение для матрицы рассеяния волноводных мод, содержащее только величины, определяемые при решении задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим прежде всего условия применимости понятия локально-однородной среды в рамках лучевого приближения. Пусть вертикальная линейная антенна длиной l расположена между горизонтами $z_1 = z_0 - l/2$ и $z_2 = z_0 + l/2$, где z_0 – координата центра антенны. В приближении ВКБ, являющимся в сущности одной из форм приближения геометрической акустики, амплитуды мод в неоднородном волноводе выражаются через диаграмму направленности при выполнении неравенств вида

$$l^2 \ll l_1^2 = 4\lambda L_n \sin^2 \beta_m(z_0) / \pi n_0^2, \quad (1)$$

$$l \ll l_2 = 4L_n \sin^2 \beta_m(z_0) / n_0^2, \quad (2)$$

$$l^6 \ll l_3^6 = 6.57 \times 10^{-2} \lambda^4 L_n^2 / n_0^4, \quad (3)$$

где $n_0 = n(z_0)$ – показатель преломления среды на горизонте $z = z_0$; λ – длина звуковой волны; $L_n = n_0 / |\nabla_z n(z_0)|$ – характерный вертикальный масштаб изменения неоднородности среды; $\beta_m(z)$ – угол скольжения бриллюэновского луча, отвечающего m -й моде [1, 2]. Первое неравенство (1) соответствует условию малости нелинейных фазовых изменений нормальных волн по глубине в пределах апертуры, а второе неравенство (2) – малости амплитудных изменений [1]. Неравенства (1), (2) эквивалентны требованию, чтобы в пределах вертикального размера l нормальные волны могли считаться квазиплоскими, т.е. вари-

ациями амплитуды, и нелинейными изменениями фазы их можно пренебречь. Заметим, что в океанических волноводах при оценках поля антенны амплитудными изменениями нормальных волн, как правило, можно пренебречь [4]. Исключение составляет лишь случай, когда точка поворота, отвечающая m -й моде, попадает в пределы антенны и ВКБ-приближение теряет силу. Неравенство (3) можно интерпретировать как условие, при котором нормальные волны, возбуждаемые в пределах угловой ширины главного лепестка диаграммы направленности, могут считаться квазиплоскими [2]. Условие (3) является следствием неравенств (1), (2), но оно более наглядно и удобно при определении границ применимости понятия локально-однородной среды в случаях, когда основная доля энергии излучения сосредоточена в основном лепестке диаграммы направленности, и поэтому имеет самостоятельную ценность. В частном случае однородного волновода ($n(z) = \text{const}$) величина $L_n = \infty$ и по всей глубине волновода нормальные волны являются плоскими.

Величина l_1 имеет смысл вертикального размера $d_{\text{фр}}$ френелевского объема бриллюэновского луча, и условие (1) можно также интерпретировать как критерий дальней зоны антенны в слоисто неоднородной среде. Действительно, горизонтальный размер $b_{\text{фр}}$ френелевского объема луча равен [5]:

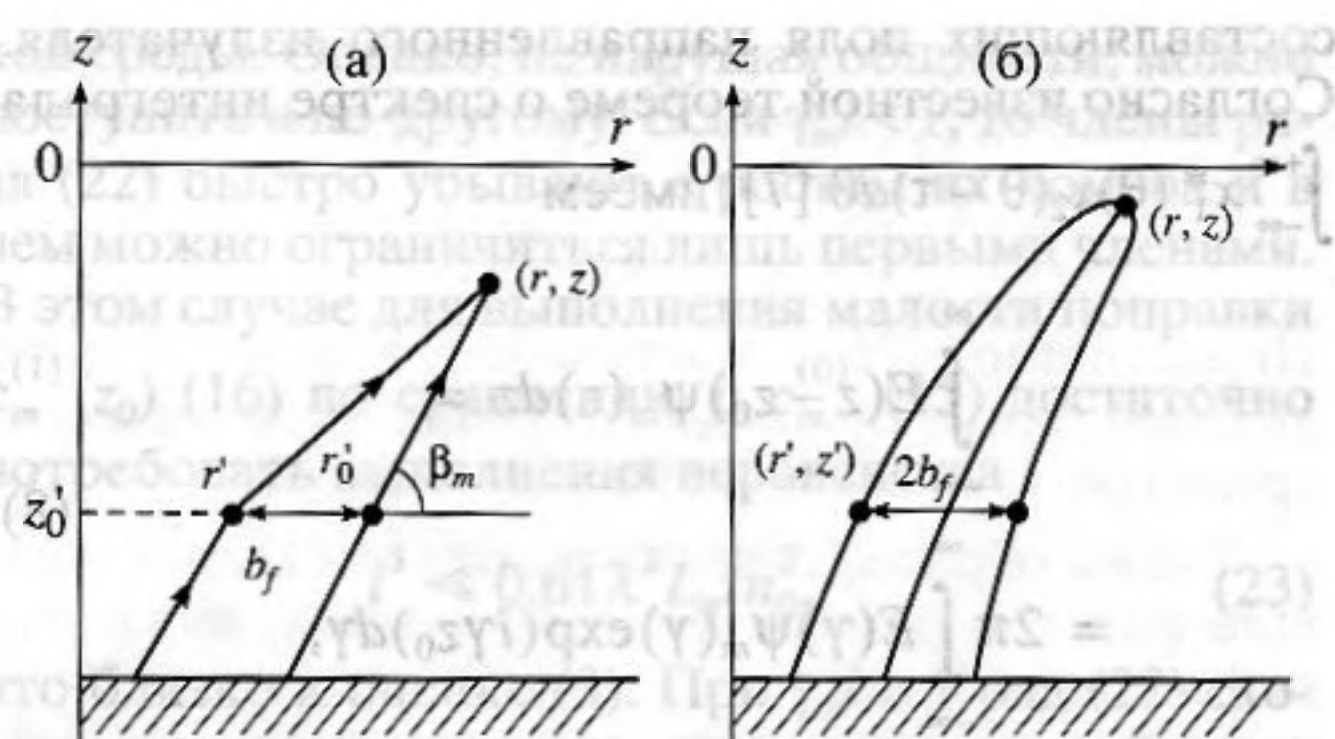
$$b_{\text{фр}} = |r - r'_0| = \left\{ \lambda \frac{d}{da_m} \int_{z_0}^z \frac{a_m}{\sqrt{n^2(z) - a_m^2}} dz \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где (r, z) – точка наблюдения; (r', z') – текущая точка границы френелевского объема, а r'_0 – координата точки пересечения “опорного” луча с плоскостью $z'_0 = \text{const}$; $a_m = n(z'_0) \cos \beta_m$ – параметр, характеризующий луч, β_m – угол между лучом и горизонтальной осью r'_0 (рисунок, а). Общий вид френелевского объема луча показан на рисунке, б. Выражение (4) запишем в виде: $b_{\text{фр}} = \{\lambda(dr/da_m)\}^{1/2}$. Записывая производную dr/da_m как $dr/da_m = (dr/dz)(dz/da_m)$ и учитывая, что $da_m/dz = n(z'_0) \sin \beta_m (d\beta_m/dz)$ и $dr/dz = \text{ctg} \beta_m$, для величины $b_{\text{фр}}$ находим

$$b_{\text{фр}} = \left[\lambda \cos \beta_m / n(z'_0) \sin^2 \beta_m \frac{d\beta_m}{dz} \right]^{1/2}.$$

Из геометрических соображений ясно (рисунок, а), что проекции френелевского объема на оси z и r связаны между собой зависимостью вида $d_{\text{фр}} = b_{\text{фр}} \text{tg} \beta_m$. Тогда из полученного выражения для вертикального размера $d_{\text{фр}}$ нетрудно получить

$$d_{\text{фр}} = [\lambda L_n \sin \beta_m / n(z'_0)]^{1/2}, \quad (5)$$



Схематическое изображение френелевского объема.

Выражение (5) хорошо согласуется с (1) для l_1 .

Сформулируем теперь условия применимости понятия локально-однородной среды в многомодовом плоскостойном волноводе, не прибегая к ВКБ-асимптотике собственных функций в окрестности расположения антенны. Поле вертикальной линейной антенны запишем в виде суммы нормальных волн

$$u(r, z) = \frac{i}{4} \sum_m c_m(z_0) \psi_m(z) H_0^{(1)}(h_m r).$$

где

$$c_m(z_0) = \int_{z_1}^{z_2} E(z - z_0) \psi_m(z) dz \quad (6)$$

– амплитуда m -й моды, $E(z)$ – распределение колебательной скорости на апертуре, $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода. Следуя [1], выясним, при каких условиях амплитуда c_m выражается через диаграмму направленности антенны.

Ортонормированные собственные функции $\psi_m(z)$ (6) задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие спектру постоянных распространения h_m , удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2(z) - h_m^2) \right] \psi_m(z) = 0 \quad (7)$$

с соответствующими граничными условиями на дне и поверхности [6]. Если воспользоваться аналогией между колебательными и волновыми процессами [7], то волновод можно рассматривать как линейный фильтр, пропускающий дискретный набор частот. Спектр прошедшего через фильтр сигнала равен произведению спектров фильтра (частотной характеристики) и исходного сигнала. В рассматриваемом случае пространственный спектр собственных функций определяет прохождение пространственных спектральных

составляющих поля направленного излучателя. Согласно известной теореме о спектре интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\theta)x_2(\theta - \tau)d\theta$ [7], имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(z - z_0)\psi_m(z)dz = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} E(\gamma)\psi_m(\gamma)\exp(i\gamma z_0)d\gamma, \quad (8)$$

где $E(\gamma)$ и $\psi_m(\gamma)$ – преобразование Фурье функций $E(z)$ и $\psi_m(z)$:

$$E(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z)e^{-i\gamma z}dz,$$

$$\psi_m(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(z)e^{-i\gamma z}dz.$$

В общем случае получить спектр собственных функций довольно затруднительно, поэтому для его определения поступим следующим образом. Функции $\psi_m(z)$ сопоставим функцию $\phi_m(z)$, являющейся ее аппроксимацией для однородной среды, преобразование Фурье которой находится легко. В однородном слое ($n(z) = n_0 = \text{const}$) выражение (7) является дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами $k_0^2 - h_m^2 = \gamma_m^2$, $k_0 = k(z_0)$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \gamma_m^2 \right] \phi_m(z) = 0, \quad (9)$$

решение которого известно [6]

$$\phi_m(z) = a_m^+ \exp(i\gamma_m z) + a_m^- \exp(-i\gamma_m z). \quad (10)$$

В пределах такого однородного слоя, толщина которого может быть сколь угодно мала, потребуем, чтобы функции $\psi_m(z)$ и $\phi_m(z)$ были близки друг другу. Постоянные a_m^\pm определим из начальных условий, что в точке $z = z_0$ значения этих функций и их первых производных равны

$$\begin{aligned} \phi_m(z_0) &= \psi_m(z_0), \\ \left. \frac{d\phi_m(z)}{dz} \right|_{z=z_0} &= \left. \frac{d\psi_m(z)}{dz} \right|_{z=z_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} a_m^+ &= \frac{1}{2i\gamma_m} [i\gamma_m \psi_m(z_0) + \psi_m'(z_0)] \exp(-i\gamma_m z_0), \\ a_m^- &= \frac{1}{2i\gamma_m} [i\gamma_m \psi_m(z_0) - \psi_m'(z_0)] \exp(i\gamma_m z_0), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\psi_m'(z_0) = \left. \frac{d\psi_m(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$. Отметим, что определе-

ние постоянных a_m^\pm (12) из начальных условий (11) не является единственно возможным. Так, например, при получении неравенств (1)–(3) в качестве функции $\psi_m(z)$ использовалась сумма двух линейно независимых решений (7) в ВКБ-приближении (двух квазиплоских волн) в точке z_0 [1, 2]. Преобразование Фурье от $\phi_m(z)$ равно

$$\phi_m(\gamma) = a_m^+ \delta(\gamma - \gamma_m) + a_m^- \delta(\gamma + \gamma_m), \quad (13)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. При получении (13) использовалось представление функции $\delta(x)$ интегралом Фурье [2]

$$\delta(x - y) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega(x - y)]d\omega.$$

Выражение (6) запишем в виде суммы двух слагаемых

$$c_m(z_0) = c_m^{(0)}(z_0) + c_m^{(1)}(z_0), \quad (14)$$

где

$$c_m^{(0)}(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(z - z_0)\phi_m(z)dz, \quad (15)$$

$$c_m^{(1)}(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(z - z_0)[\psi_m(z) - \phi_m(z)]dz \quad (16)$$

– поправка к амплитуде m -й моде, обусловленная неоднородностью среды. В выражениях (15), (16) пределы интегрирования по сравнению с (6) продлены до бесконечности, что не изменяет значения интегралов, так как вне раскрытия антенны функция $E(z) = 0$. Соотношение (15), пользуясь формулой (8), представим в виде

$$c_m^{(0)}(z_0) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} E(\gamma)\phi_m(\gamma)\exp(i\gamma z_0)d\gamma. \quad (17)$$

Применив выражение (10) к (17), с учетом (12) находим

$$\begin{aligned} c_m^{(0)}(z_0) &= \\ &= 2\pi [E(\gamma_m)a_m^+ \exp(i\gamma_m z_0) + E(-\gamma_m)a_m^- \exp(-i\gamma_m z_0)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Преобразование Фурье $E(\gamma)$, как известно [7], пропорционально диаграмме направленности антенны $D(\beta)$ в дальней зоне

$$E(\gamma) \sim \begin{cases} D(\beta), & |\gamma| \leq k_0, \quad \beta = \arcsin(\gamma/k_0), \\ 0, & |\gamma| > k_0. \end{cases}$$

Таким образом, первое слагаемое $c_m^{(0)}$ (18) в соотношении (14) определяется диаграммой направленности антенны в однородной среде, собственными функциями и их производными на раскрытие антенны. Второе слагаемое $c_m^{(1)}$ (16) определяется разностью собственных функций $\psi_m(z)$ и $\phi_m(z)$, взвешенной с распределением $E(z - z_0)$ в пределах апертуры антенны.

Оценим точность представления поля в неоднородном волноводе через диаграмму направленности антенны в однородной среде. Для этого разложим разность $\vartheta_m(z) = \psi_m(z) - \phi_m(z)$ в ряд Тейлора в окрестности центра антенны $z = z_0$:

$$\vartheta_m(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2 \frac{(z - z_0)^2}{2} + b_3 \frac{(z - z_0)^3}{6} + \dots, \quad (19)$$

где

$$b_0 = \psi_m(z_0) - \phi_m(z_0), \quad b_1 = \psi'_m(z_0) - \phi'_m(z_0), \quad (20)$$

$$b_2 = \psi''_m(z_0) - \phi''_m(z_0), \quad b_3 = \psi'''_m(z_0) - \phi'''_m(z_0).$$

Из начальных условий (11) сразу следует, что $b_0 = b_1 = 0$. Далее из (7), (9) и (11) находим, что и $b_2 = 0$. В результате для разности $\vartheta_m(z)$ (19) получаем

$$\vartheta_m(z) = b_3 \frac{(z - z_0)^3}{6} + \dots \quad (21)$$

Определим величину b_3 . Третью производную функций $\psi_m(z)$ и $\phi_m(z)$ можно найти, продифференцировав (7) и (9) по z , что дает

$$b_3 = -2(k_0)^2 (n_0^2/L_n) \phi_m(z_0),$$

Если теперь разложить $\phi_m(z)$ в ряд Тейлора в окрестности центра антенны $z = z_0$ и учесть, что, согласно (10), $\phi''_m(z) = -\gamma^2 \phi_m(z)$ и $\phi'''_m(z) = -\gamma^2 \phi'_m(z)$, то выражение для амплитуды m -й моды (14) в приближении поправки третьего порядка имеет вид

$$c_m(z_0) = \int_{z_1}^{z_2} E(z - z_0) \times \left\{ \phi_m(z_0) \left[1 - \frac{\gamma_m^2 (z - z_0)^2}{2} - \frac{k_0^2 n_0^2 (z - z_0)^3}{3L_n} + \dots \right] + \phi'_m(z_0) \left[(z - z_0) - \frac{\gamma_m^2 (z - z_0)^3}{6} + \dots \right] \right\} dz. \quad (22)$$

Можно задаться, например, определенным видом распределения начального поля $E(z)$ и рассмотреть, таким образом, влияние поправочного члена, обусловленного неоднородностью океанической

среды. Однако, не нарушая общности, можно поступить и по-другому. Если $\gamma_m l < 1$, то члены ряда (22) быстро убывают с ростом их номера и в нем можно ограничиться лишь первыми членами. В этом случае для выполнения малости поправки $c_m^{(1)}(z_0)$ (16) по сравнению с $c_m^{(0)}$ (15) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$l^3 \ll 0.61 \lambda^2 L_n / n_0^2, \quad (23)$$

что близко к оценке (3). При $\gamma_m l > 1$ ряд (22) сходится медленно и для применимости приближения малости величины $c_m^{(1)}(z_0)$ необходимо, чтобы поправочный член был бы много меньше ближайшего к нему левого члена последовательности [8]. Это требование приводит к неравенству

$$l \ll 3L_n \sin^2 \beta_m(z_0) / n_0^2, \quad (24)$$

которое всего лишь в 1.3 раза отличается от условия (2). Здесь $\beta_m(z_0) = \arcsin[\gamma_m(z_0)/k_0]$ – угол скольжения бриллюэновского луча m -й моды на горизонте $z = z_0$. Выполнение этого неравенства гарантирует, что какой бы член последовательности (22) не был бы преобладающим, поправочный член будет много меньше его. При $\gamma_m l > 1$ в общем случае необходимо учитывать в (22) члены более высоких порядков. Однако при выполнении неравенств вида

$$1 \gg n'(z_0) \gg n''(z_0) \gg n'''(z_0) \gg \dots \quad (25)$$

учет дополнительных членов в разложении (22) не изменяет оценки (24). Таким образом, при выполнении условий (23), (24) диаграмма направленности адекватно описывает угловое распределение излучаемой мощности в неоднородном волноводе. Однако в локально-однородной среде эти неравенства должны быть дополнены еще условием малости изменений диаграммы направленности, вызванных вариациями фазы нормальных волн вдоль всей апертуры. Возникающие при этом ограничения на длину антенны можно оценить следующим образом.

Разложим показатель экспоненты $\gamma_m(z)$ преобразования Фурье $E(\gamma_m)$ в ряд Тейлора по степеням расстояния $\xi = z - z_0$ от центра антенны, ограничиваясь только линейным членом

$$\gamma_m(z) = \gamma_m(z_0) + \frac{d\gamma_m(z_0)}{dz} \xi + O(\xi^2),$$

где $d\gamma_m(z_0)/dz = k_0 n_0^2 / L_n \sin \beta_m(z_0)$. Угловое смещение $\delta\beta_m(l)$ диаграммы направленности как целого, вызванное вариациями $\gamma_m(z)$ на апертуре, $\delta\gamma_m(l) = \gamma_m(l/2) - \gamma_m(-l/2)$, оценивается как $\delta\beta_m(l) \approx n_0^2 / L_n \sin \beta_m(z_0)$. Для того чтобы изменения поля были малы, угловое расстояние должно быть су-

щественно меньше ширины диаграммы направленности λ/l , $\delta\beta_m(l) \ll \lambda/l$. В результате получаем

$$l^2 \ll \lambda L_n \sin \beta_m(z_0)/n_0^2. \quad (26)$$

Неравенство (26), выступающее как условие дальней зоны антенны в слоисто-неоднородной среде (см. (5)), совпадает с условием (1).

Таким образом, ограничения (1)–(3), полученные ранее в рамках лучевой теории, являются дифракционными по своему содержанию. Этот результат понятен, поскольку при решении дифференциального уравнения (6) предполагалось выполнение (25), что фактически является условием применимости в неоднородной среде ВКБ-асимптотики собственных функций в окрестности расположения центра антенны.

Рассмотрим теперь матрицу рассеяния волноводных мод. Положим, что выполняются следующие условия:

а) Эффекты многократного рассеяния малы, т.е. можно пренебречь полями, которые повторно рассеиваются на теле после отражения от стенок волновода. Условие малости повторно рассеянных полей, как показывают анализ численных расчетов [9] и аналитические оценки [10], выполняется для тел, удаленных от границы волновода на расстояния, превышающие эквивалентный радиус тела. При этом интенсивность многократно рассеянных полей не превышает 10% от общей энергии возмущенного поля. Например, для отражающей сферы эквивалентный радиус совпадает с радиусом большого круга, а для вытянутого в горизонтальной плоскости сфероида – минимальный радиус окружности, описанный вокруг сфероида в направлении падения волны.

б) В пределах вертикального размера рассеивателя нормальные волны являются квазиплоскими, что предполагает выполнение неравенств (1)–(3) или (23), (24), (26).

В рамках этих приближений, как показано в работе [3], выражение для $S_{\mu m}$ – матрицы рассеяния волноводных мод имеет вид

$$S_{\mu m} = \frac{1}{4 \sin \varphi_m \sin \varphi_\mu} \{ F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^+) \exp[i(\varphi_m - \varphi_\mu)] + F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^-) \exp[i(\varphi_\mu - \varphi_m)] - F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^-) \exp[i(\varphi_m + \varphi_\mu)] - F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^+) \exp[-i(\varphi_m + \varphi_\mu)] \}, \quad (27)$$

где

$$\varphi_m(z_0) = \int_{z_0}^{\bar{z}_m} \gamma_m(z') dz' + \delta_m.$$

Здесь $\mathbf{k}_m^\pm = (h_m \pm \gamma_m)$ – локальные волновые векторы бриллюэновского луча с горизонтальной h_m и вертикальной γ_m компонентами, отвечающие m -й моде; \bar{z}_m – точка поворота, которая может лежать и на границе волновода; δ_m – каустический сдвиг фазы; z_0 – глубина положения центра рассеивателя; $F(\mathbf{k}_m^\pm, \mathbf{k}_\mu^\pm)$ – амплитуда рассеяния в одно-родной среде, описывающая амплитуду и фазу рассеянной волны в дальней зоне в направлении \mathbf{k}_μ^\pm при условии, что на тело падает плоская волна, распространяющаяся в направлении \mathbf{k}_m^\pm . Выражение (27) для матрицы рассеяния в целях удобства несколько видоизменено по сравнению с исходным выражением, приведенным в работе [3]. В новой формулировке матрица рассеяния, как и амплитуда рассеяния, имеет размерность [м], что больше соответствует физическому смыслу. Выражение (27), как можно видеть, симметрично относительно перемены индексов, $S_{\mu m} = S_{m\mu}$, что согласуется с теоремой взаимности для волноводов [11]. При проверке свойств взаимности следует иметь в виду равенство

$$F(\mathbf{k}_m^\alpha, \mathbf{k}_\mu^\beta) = F(\mathbf{k}_\mu^{-\beta}, \mathbf{k}_m^{-\alpha}),$$

где индексы α и β могут принимать значения +1 или -1. Все четыре возможные комбинации индексов отражены для наглядности в таблице. Таким образом, матрица S' , транспонированная по отношению к матрице рассеяния S , равна матрице S , $S' = S$. В случае изотропного рассеяния ($F(\mathbf{k}_m^\pm, \mathbf{k}_\mu^\pm) = F_0 = \text{const}$), как и следовало ожидать, величина $S_{\mu m}$ равна амплитуде рассеяния F_0 , $S_{\mu m} = F_0$.

Выражение (27) получено с использованием ВКБ-асимптотики собственных функций в окрестности расположения рассеивателя [3], что крайне неудобно при выполнении численных расчетов. Желательно, чтобы любая программа расчета звукового поля в волноводе, использующая модовый подход (т.е. вычисляющая собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля невозмущенного волновода), могла бы без изменений войти как составная часть в программу расчета дифракции звука на телах в волноводе. Для этого необходимо соответствующим образом переформулировать выражение (27) для S -матрицы рассеяния, чтобы в нем фигурировали бы только вычисляемые величины. Это можно выполнить различными способами. Один из таких способов, основанный на решении уравнения Шредингера, изложен в работе [12]. Другой подход приводится ниже.

Как было показано ранее, ограничения на вертикальный размер антенны (тела), при которых применимо использование диаграммы направле-

Таблица

Таблица соответствий

	$F(k_m^-, k_\mu^+) \Rightarrow F(k_\mu^-, k_m^+)$
	$F(k_m^-, k_\mu^-) \Rightarrow F(k_\mu^+, k_m^+)$
	$F(k_m^+, k_\mu^-) \Rightarrow F(k_\mu^+, k_m^-)$
	$F(k_m^+, k_\mu^+) \Rightarrow F(k_\mu^-, k_m^-)$

ности (амплитуды рассеяния) в задачах волноводного распространения, полученные в ВКБ-приближении (1)–(3) и на основе решения задачи Штурма–Лиувилля (23), (24), (26), равносильны между собой. Из полученных результатов следует, что от лучевого представления S -матрицы можно перейти к модовому, если в выражении (27) формально осуществить переход от ВКБ-асимптотики собственных функций к их модовому представлению. Согласно [6], собственные функции $\psi_m(z)$ в приближении ВКБ определяются соотношением

$$\psi_m(z) = \sin \varphi_m(z) / \sqrt{s_m(z) N_m}, \quad (28)$$

где

$$s_m(z) = \gamma_m(z) / k_0 = \sqrt{k_0^2 n^2(z) - h_m^2} / k_0,$$

$$N_m = \int_{-H}^0 s_m^{-1}(z) \sin^2 \varphi_m(z) dz.$$

Здесь H – глубина волновода. Если теперь в соотношении (28) пренебречь слабой зависимостью величины $s_m(z)$ по сравнению с величиной $\sin \varphi_m(z)$, что вполне допустимо, то выражение (27) можно представить в виде

$$S_{\mu m}(z_0) = p_m^+ p_\mu^+ F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^-) + p_m^- p_\mu^- F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^+) + p_m^+ p_\mu^- F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^+) + p_m^- p_\mu^+ F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^-), \quad (29)$$

где

$$p_{m,\mu}^\pm(z_0) = \frac{1}{2} \pm \frac{\psi'_{m,\mu}(z_0)}{2i\gamma_{m,\mu}(z_0)\psi_{m,\mu}(z_0)},$$

что совпадает с модифицированным выражением для S -матрицы рассеяния, полученным в работе [12]. Если имеет место симметрия амплитуды рассеяния (например, тело вращения):

$$F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^+) = F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^-), \quad F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^-) = F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^+),$$

то выражение (29) упрощается и принимает вид:

$$S_{\mu m}(z_0) = P_{\mu m}^+ F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^+) + P_{\mu m}^- F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^-),$$

где

$$P_{\mu m}^\pm(z_0) = \frac{1}{2} \pm \frac{\psi'_m(z_0)\psi'_\mu(z_0)}{2\gamma_m(z_0)\gamma_\mu(z_0)\psi_m(z_0)\psi_\mu(z_0)}.$$

Таким образом, коэффициенты $p_{m,\mu}^\pm$ или $P_{\mu m}^\pm$, определяющие матрицу рассеяния, формулируются непосредственно для вычисляемых величин, таких как собственные функции, их производные и собственные значения. Это дает возможность стыковать численные программы расчета волновых полей и дифракции на телах в волноводе. Однако необходимо понимать, что в рамках рассматриваемого подхода [3] выражения (27) и (29) эквивалентны между собой и различаются лишь формой записи. Обусловлено это тем, что представление S -матрицы через амплитуду рассеяния является одним из необходимых условий применимости ВКБ-асимптотики собственных функций в окрестности расположения рассеивателя. Поэтому, если тело находится в области тени падающих или (и) рассеянных мод, то такие моды исключаются из рассмотрения.

Таким образом, на основе решения задачи Штурма–Лиувилля изложены условия применимости понятия локально-однородной среды в задачах волноводного распространения. Показано, что они близки к аналогичным условиям, полученным ранее в ВКБ-приближении. В зависимости от характера изменения неоднородности водной среды, длины звуковой волны и номера моды эти условия накладывают определенные ограничения на толщину водного слоя, в пределах которого нормальные волны можно считать квазиплоскими. При помощи этих условий удобно проводить анализ волновой картины поля, так как в пределах такого квазиоднородного слоя диаграмма направленности (амплитуда рассеяния) является адекватной характеристикой излучения (рассеяния).

Предложена новая формулировка матрицы рассеяния волноводных мод, которая содержит только величины (и их производные), вычисляемые при решении уравнения Шредингера. Она позволяет не только адекватным способом вычислять модовые составляющие рассеянных по-

лей, но и дает возможность использовать результаты многочисленных работ по дифракции на телах в свободном пространстве.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-02-17671).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Ю.А., Кузькин В.М. Об излучении антенны в многомодовом волноводе с плавно меняющимися параметрами // Акуст. журн. 1985. Т. 33. № 1. С. 49–54.
2. Кузькин В.М., Фролова Т.А. Усредненный закон спада интенсивности звукового поля протяженной вертикальной антенны в мелком море // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 891–897.
3. Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г. Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 339–343.
4. Кравцов Ю.А., Кузькин В.М. О работе вертикальной линейной антенны в многомодовом рефракционном волноводе // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 49–54.
5. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. Алуэль Д.С., Келлер Дж.Б. Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане // Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Келлера Дж.Б., Пападакиса Дж.С. М.: Мир, 1980. С. 20–75.
7. Зверев В.А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975. 275 с.
8. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // М.: Наука, 1990. 528 с.
9. Varadan V.V., Varadan V.K. Configurations with finite numbers of scatters – a self – consistent T – matrix approach // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 1. P. 213–217.
10. Uzunoglu N.K., Fikioris J.G. Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric wave guide // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 72. № 5. P. 628–637.
11. Young-chung Cho. Reciprocity principle in duct acoustics // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 67. № 5. P. 1421–1426.
12. Grigoriev V.A., Katsnelson B.G., Kuz'kin V.M., Petnikov V.G. Sound wave diffraction in waveguides // Physics of Vibrations. 1999. V. 7. № 3. P. 185–190.

Radiation and Scattering of Sound Waves in Oceanic Waveguides

V. M. Kuz'kin

The applicability conditions for the concept of a directivity pattern (a scattering amplitude) in the problems on the waveguide propagation are formulated. The consideration is based on the solution of the Sturm–Liouville problem. The results of the comparison between these conditions and the analogous conditions obtained earlier in the ray approximation are discussed. The expression for the scattering matrix of waveguide modes is modified on the basis of the suggested conditions in such a way that it involves only the quantities determined from the solution of the Schrödinger equation. This makes it possible to perform numerical calculations by using the results of numerous studies of the propagation in inhomogeneous waveguides and the diffraction by complex-structured bodies in free space.

(2) поля в волноводе с неоднородной средой. В работе рассмотрены условия применимости концепции диаграммы направленности (амплитуды рассеяния) в задачах распространения волн в волноводе. Рассмотрение основано на решении задачи Штурма–Лиувилля. Результаты сравнения этих условий с аналогичными условиями, полученными в приближении лучей, обсуждаются. Выражение для матрицы рассеяния мод волновода модифицируется на основе предложенных условий таким образом, что оно включает только величины, определяемые из решения уравнения Шрёдингера. Это позволяет выполнять численные расчеты, используя результаты многочисленных исследований распространения в неоднородных волноводах и дифракции на сложной структуре тел в свободном пространстве.