

УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ ИЗГИБНОГО ТИПА

© 2001 г. В. В. Тютюкин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 г. Москва, ул. Шверника 4

E-mail: bvp@akin.ru

Поступила в редакцию 15.02.2001 г.

В статье рассматриваются свойства акустического объекта – многоканальной длинной линии (МДЛ) изгибного типа. Получены аналитические формулы для основных акустических характеристик МДЛ при произвольном числе изгибно колеблющихся одиночных линий, ее составляющих: входной импеданс, резонансные частоты, коэффициенты отражения и прохождения для МДЛ-изолятора, в том числе для их каскадного соединения. Выполнены численные расчеты и приведены графики частотных зависимостей коэффициентов отражения и прохождения для различных параметров составляющих линий. Показано, что акустические характеристики МДЛ-изоляторов обладают некоторыми преимуществами по сравнению с характеристиками этих объектов на основе одиночных линий.

Проблема поглощения и изоляции звуковых и вибрационных волн остается актуальной, как в теоретическом, так и в практическом плане. В последнее время в этой области акустики широкое развитие получают так называемые активные методы [1–7]. Однако традиционные методы поглощения и изоляции волн продолжают развиваться (см., например, [8]). Один из таких методов описан в работе [9], которая посвящена исследованию характеристик нового акустического объекта – так называемой многоканальной длинной линии (МДЛ) для волн продольного типа.

В настоящей статье метод МДЛ развивается для изгибных волн. Так же, как и в работе [9], вычисляются акустические характеристики МДЛ изгибного типа – резонансные частоты, входной импеданс, коэффициенты отражения и прохождения изгибной волны.

Будем полагать, что МДЛ изгибного типа состоит из одиночных длинных линий в виде параллельных друг другу плоских стержней (полос), со-

вершающих изгибные колебания с частотой ω . Каждую отдельную линию будем характеризовать параметрами: l – длина одинаковая для всех линий, $m_j = \rho_j h_j$ – масса стержня, приходящаяся на единицу его ширины (предполагается, что последняя много меньше длины изгибной волны), ρ_j – плотность, h_j – толщина, $B_j = E_j h_j^3 / 12$ – изгибная жесткость, E_j – модуль Юнга, $j = 1-N$ – номер стержня.

Рассматриваемая модель МДЛ предполагает, что левые концы всех линий ($x = 0$) соединены вместе, так же, как и их правые концы ($x = l$) (рис. 1а). Соединения осуществляются невесомыми и не деформируемыми пластинами, так что поперечные смещения w_j каждого конца для всех линий одинаковы, а величины w'_j равны нулю. Это последнее условие может быть обеспечено за счет большой величины изгибной жесткости МДЛ, которая, в свою очередь, может быть создана, например, за счет достаточного отнесения отдельных линий от средней линии МДЛ.

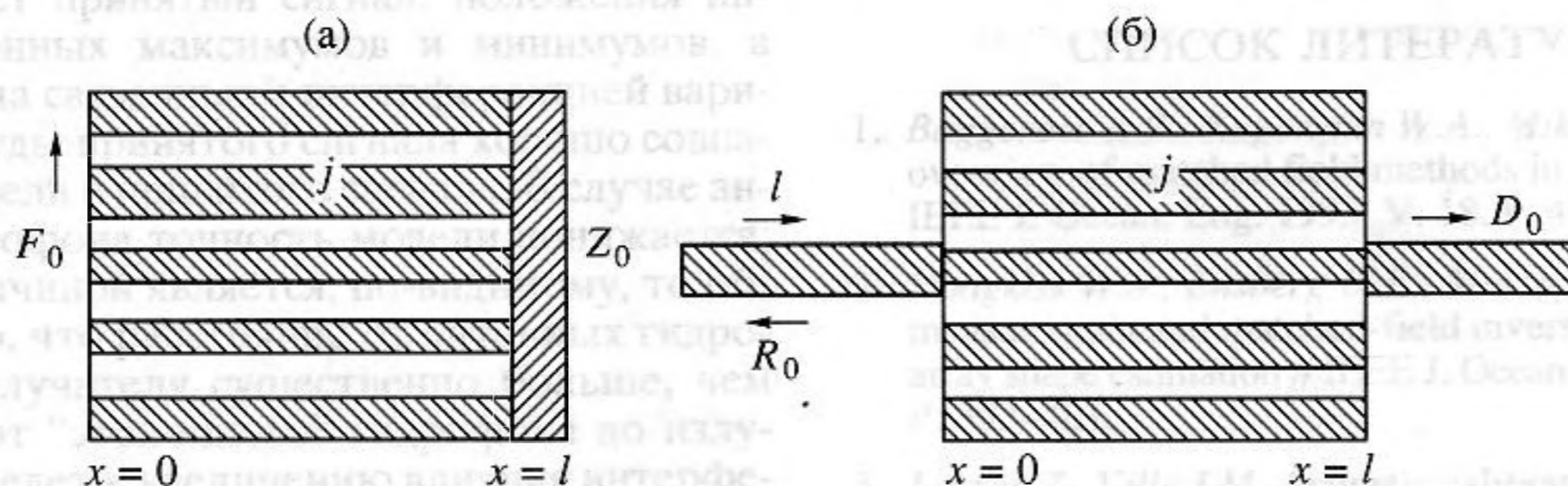


Рис. 1. К выводу уравнений для акустических характеристик МДЛ.

В соответствии с выбранной моделью будем полагать, что поперечные смещения w_j в каждой из одиночных длинных линий удовлетворяют уравнению для изгибных колебаний стержня

$$\frac{d^4 w_j}{dx^4} - k_j^4 w_j = 0, \quad (1)$$

решение которого можно выбрать в виде

$$w_j = a_j \cos k_j x + b_j \operatorname{ch} k_j x + c_j \sin k_j x + d_j \operatorname{sh} k_j x. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $k_j^4 = \frac{m_j \omega^2}{B_j}$; k_j – волновое

число изгибных волн в j -й линии. Граничные условия можно записать в виде

$$w_j(0) = w_0, \quad w_j(l) = w_l, \quad (3)$$

$$w'_j(0) = w'_j(l) = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^N F_j(0) + F_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^N F_j(l) + F_l = 0, \quad (5)$$

где w_0, w_l и F_0, F_l – неизвестные пока смещения и перерезывающие силы. Подставляя решение (2) в граничные условия (3) и (4), после несложных преобразований получим значения неизвестных коэффициентов a_j, b_j, c_j, d_j :

$$a_j = -b_j = \frac{1}{2\Delta_j} (T_j w_0 - S_j w_l), \quad (6a)$$

$$c_j = \frac{1}{2\Delta_j} (-G_j w_0 + C_j w_l); \quad (6b)$$

$$d_j = \frac{1}{2\Delta_j} (G_j^+ w_0 + C_j w_l). \quad (6b)$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_j = 1 - \operatorname{ch} \varphi_j \cos \varphi_j;$$

$$T_j = \operatorname{ch} \varphi_j \sin \varphi_j + \cos \varphi_j \operatorname{sh} \varphi_j; \quad S_j = \operatorname{sh} \varphi_j + \sin \varphi_j;$$

$$G_j^\pm = 1 - (\operatorname{ch} \varphi_j \cos \varphi_j \pm \operatorname{sh} \varphi_j \sin \varphi_j);$$

$$C_j = \operatorname{ch} \varphi_j - \cos \varphi_j; \quad \varphi_j = k_j l.$$

Подставляя значения (6a)–(6b) в формулу (2), можно, в принципе, получить поля изгибных волн в любой одиночной длинной линии. Для определения совокупного действия всех линий, объединенных в МДЛ, необходимо использовать граничные условия (5). Перерезывающие силы в каждой

одиночной линии определяются известной формулой

$$F_j(x) = -B_j \frac{d^3 w_j}{dx^3} = \quad (7)$$

$$= -B_j k_j^3 (-a_j \cos k_j x + b_j \operatorname{ch} k_j x + c_j \sin k_j x + d_j \operatorname{sh} k_j x).$$

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение параметры B_0 и k_0 некоторой линии “сравнения” и безразмерные величины

$$\Psi_j = \frac{B_j k_j^3}{B_0 k_0^3} = \frac{m_j c_n^j}{m_0 c_n^0},$$

где $c_n^{j,0}$ – соответствующие скорости изгибных волн. С учетом формул (6), выражения для $F_j(0)$ и $F_j(l)$ можно преобразовать к виду

$$\frac{F_j(0)}{B_0 k_0^3} = \frac{\Psi_j}{\Delta_j} (T_j w_0 - S_j w_l); \quad (8a)$$

$$\frac{F_j(l)}{B_0 k_0^3} = \frac{\Psi_j}{\Delta_j} (S_j w_0 - T_j w_l). \quad (8b)$$

Подставляя формулы (8) в формулы (5), получим:

$$\frac{F_0}{B_0 k_0^3} = f_0 = Z_{11} w_0 + Z_{12} w_l; \quad (9a)$$

$$\frac{F_l}{B_0 k_0^3} = f_l = Z_{21} w_0 + Z_{22} w_l. \quad (9b)$$

Здесь Z_{ik} – безразмерные импедансы, имеющие значения

$$Z_{11} = -Z_{22} = -\sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j T_j}{\Delta_j}; \quad (10)$$

$$Z_{12} = -Z_{21} = \sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j S_j}{\Delta_j}.$$

Отметим, что все приведенные выше формулы получены в предположении одинаковой ширины всех стержней. Однако различная их ширина может позволить изменять значения Ψ_j , а следовательно, и импедансы (10) в широких пределах. В этом случае

$$\Psi_j = \frac{B_j k_j^3 H_j}{B_0 k_0^3 H_0} = \frac{m_j H_j c_n^j}{m_0 H_0 c_n^0}.$$

Формулы (9) и (10) являются исходными для определения основных акустических характеристик МДЛ изгибного типа.

Прежде всего найдем входной импеданс МДЛ.

По определению $Z_{вх} = \frac{f_0}{w_0}$ – входной импеданс,

$Z_0 = \frac{f_l}{w_l}$ – импеданс нагрузки на МДЛ. Отметим,

что благодаря специфичности граничных условий, приведенные здесь импедансы являются скалярными величинами, в то время как в общем случае изгибных колебаний они имеют матричный характер. Формулы (9) можно представить в виде

$$Z_{вх} = Z_{11} + Z_{12} \frac{w_l}{w_0};$$

$$Z_0 = Z_{21} \frac{w_0}{w_l} + Z_{22},$$

откуда с учетом формул (10) получим:

$$Z_{вх} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_0}. \tag{11}$$

Отметим, что формула (11) по форме совпадает с выражением для входного импеданса МДЛ продольного типа [10], но отличается значениями импедансов Z_{ik} . Из условий $Z_{вх} = 0$ и $Z_{вх} = \infty$ можно определить резонансные (при условии $Z_0 = 0$) и антирезонансные частоты, которые можно найти из соотношений $Z_{11} = \pm Z_{12}$ и $Z_{11} = 0$ соответственно.

Рассмотрим далее такие акустические характеристики МДЛ как коэффициенты отражения и прохождения изгибной волны. Модель, выбранная для расчета, представлена на рис. 1б. Слева и справа к МДЛ подсоединена одиночная длинная линия, параметры которой B_0 и k_0 будем описывать значком $j = 0$. (Конструктивно она, в частности, может “проходить” сквозь многоканальную линию, являясь одним из звеньев последней.) По этой линии распространяется гармоническая волна единичной амплитуды

$$w = \exp(ik_0x),$$

которая порождает две отраженных от системы волны, одну – однородную, другую – неоднородную, убывающую по амплитуде при $x \rightarrow -\infty$:

$$w_1 = R \exp(-ik_0x) + G \exp(k_0x).$$

При прохождении МДЛ на ее выходе образуются аналогичные волны

$$w_2 = D \exp[ik_0(x-l)] + E \exp[-k_0(x-l)].$$

Здесь R и D – интересующие нас коэффициенты отражения и прохождения изгибной волны.

Используя граничные условия (4) и (5), также справедливые для отраженных и прошедших волн, можно получить соотношения для смещений

$$w_0 = (1+i)R + (1-i); \quad w_l = (1+i)D_1,$$

где $D_1 = D \exp(ikl)$, а также для перерезывающих сил и импеданса Z_0 :

$$f_0 = 2i(1-R); \quad f_l = 2iD_1; \quad Z_0 = 1+i.$$

С учетом этого нетрудно получить формулы для коэффициентов отражения и прохождения

$$R = \frac{iZ_{вх} + Z_1}{Z_{вх} + Z_1}; \tag{12}$$

$$D_1 = \frac{2Z_{12}}{(Z_{вх} + Z_1)(Z_{11} + Z_0)}. \tag{13}$$

Здесь $Z_1 = 1+i$, а величины $Z_{вх}$, Z_{11} и Z_{12} определяются формулами (10) и (11). Очевидно, что при отсутствии потерь $|R|^2 + |D_1|^2 = 1$.

Представляет интерес рассмотрение каскадного (последовательного) соединения нескольких МДЛ с различным набором одиночных длинных линий. В этом случае последние можно описать параметрами и функциями с двумя индексами, например,

$$\varphi_j^{(n)} = k_j^{(n)} l_n,$$

$$T_j^{(n)} = \operatorname{ch} \varphi_j^{(n)} \sin \varphi_j^{(n)} + \cos \varphi_j^{(n)} \operatorname{sh} \varphi_j^{(n)},$$

$$Z_{11}^{(n)} = - \sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j^{(n)}}{\Delta_j^{(n)}} T_j^{(n)}$$

и т.д. Здесь $j = 1-N^{(n)}$, n – номер в последовательности МДЛ (их отсчет ведется со стороны прошедшей волны).

Из формулы (11) нетрудно получить рекуррентную последовательность для величин $Z_{вх}^{(n)}$:

$$Z_{вх}^{(n)} = Z_{11}^{(n)} - \frac{(Z_{12}^{(n)})^2}{Z_{11}^{(n)} + Z_{вх}^{(n-1)}}, \tag{14}$$

где, очевидно, $Z_{вх}^{(0)} = Z_0$. Формула для коэффициента отражения $R^{(n)}$ получается из формулы (12) заменой $Z_{вх}$ на $Z_{вх}^{(n)}$:

$$R^{(n)} = \frac{iZ_{вх}^{(n)} + Z_1}{Z_{вх}^{(n)} + Z_1}; \tag{15}$$

Формулу для коэффициента прохождения $D^{(n)}$ можно получить, записав формулу (9а) для перерезывающих сил на “левых” концах каждой из МДЛ.

$$f^{(n)}(0) = Z_{11}^{(n)}(l_n)w^{(n)}(0) + Z_{12}^{(n)}(l_n)w^{(n)}(l_n);$$

$$f^{(n-1)}(l_n) = Z_{11}^{(n-1)}(l_{n-1})w^{(n-1)}(l_n) + Z_{12}^{(n-1)}(l_{n-1})w^{(n-1)}(l_{n-1});$$

$$f^{(1)}(l_2) = Z_{11}^{(1)}(l_1)w^{(1)}(l_2) + Z_{12}^{(1)}(l_1)w^{(1)}(l_1).$$

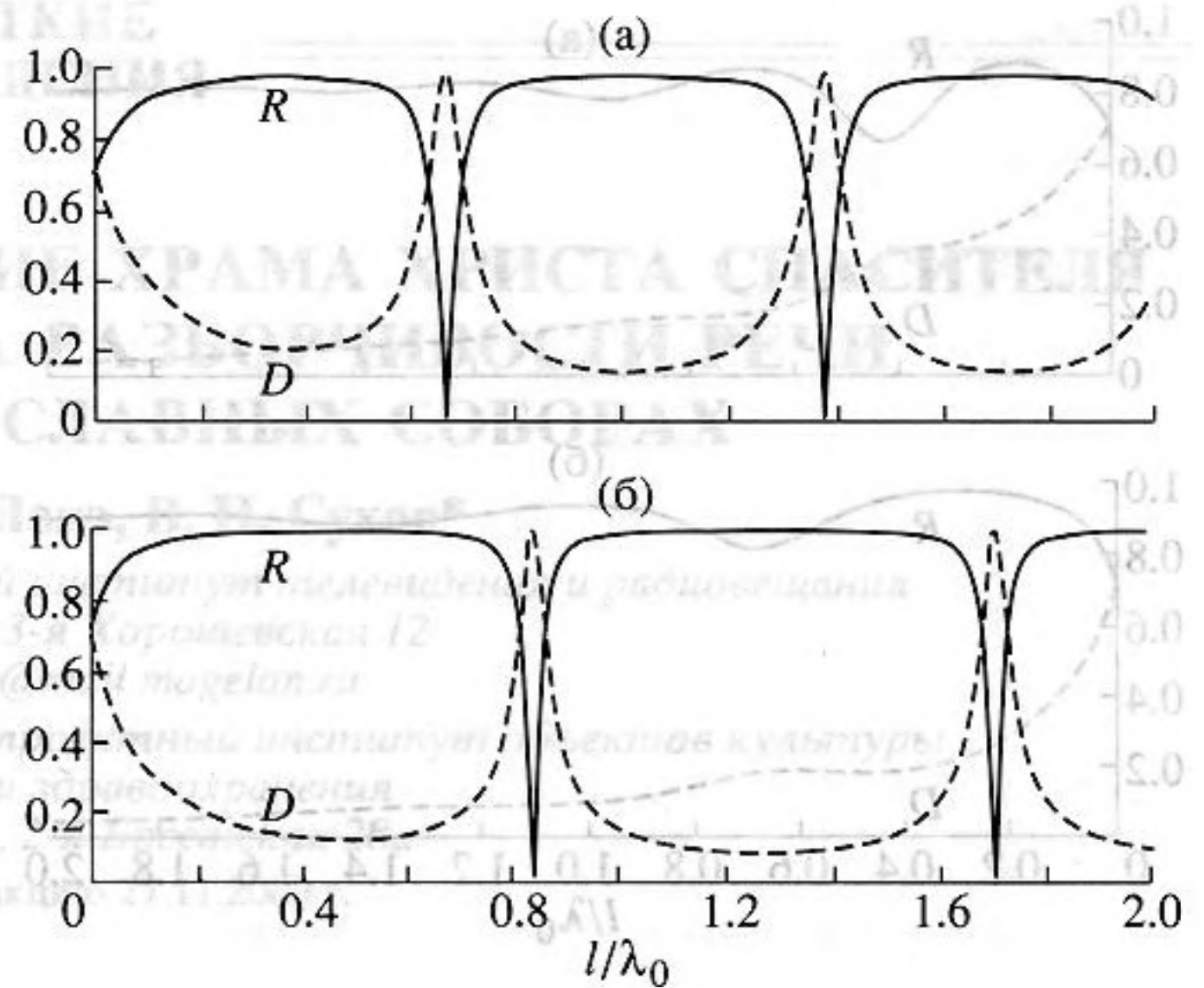
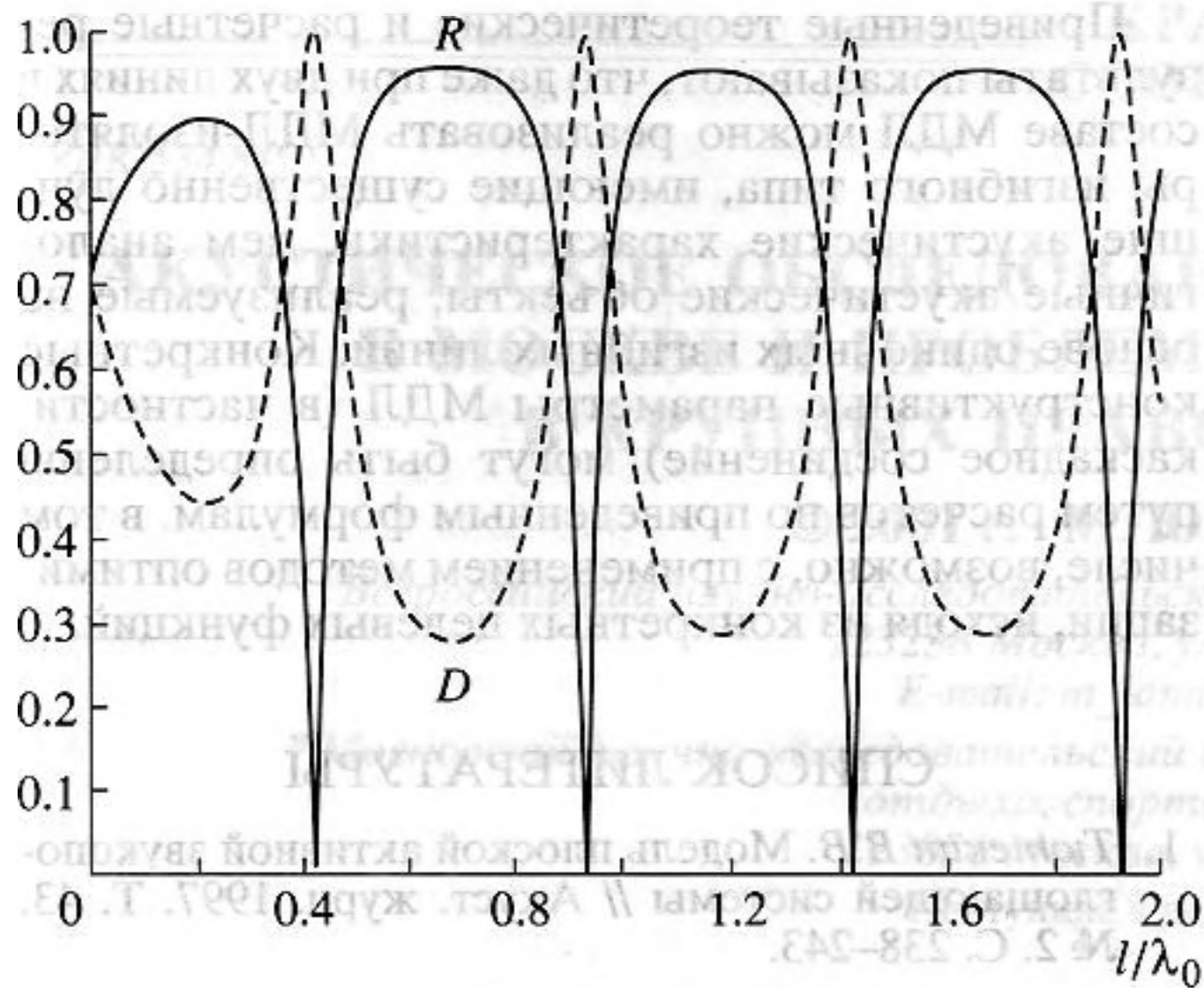


Рис. 2. Модули коэффициентов отражения R и прохождения D для одноканального изолятора с граничными условиями (3)–(5).

Рис. 3. То же, что на рис. 2, для двухканальной МДЛ. а – $h_1 = h_2 = 2h_0$; б – $h_1 = h_2 = 3h_0$.

(Значение l_1 соответствует “правому” концу оконечной МДЛ.)

Разделив каждое из равенств на значение смещения на “левом” конце каждой из МДЛ и учитывая соотношение $w^{(k)}(l_k) = w^{(k-1)}(l_k)$, получим систему равенств

$$Z_{\text{вх}}^{(n)} = Z_{11}^{(n)}(l_n) + Z_{12}^{(n)}(l_n) \frac{w^{(n-1)}(l_n)}{w^{(n)}(0)};$$

$$Z_{\text{вх}}^{(n-1)} = Z_{11}^{(n-1)}(l_{n-1}) + Z_{12}^{(n-1)}(l_{n-1}) \frac{w^{(n-1)}(l_{n-1})}{w^{(n-1)}(l_n)};$$

$$Z_{\text{вх}}^{(1)} = Z_{11}^{(1)}(l_1) + Z_{12}^{(1)}(l_1) \frac{w^{(1)}(l_1)}{w^{(1)}(l_2)};$$

Определяя отношения смещений и произведя их перемножение, получим

$$\frac{w^{(1)}(l_1)}{w^{(n)}(0)} = \prod_{k=1}^n \frac{Z_{\text{вх}}^{(k)} - Z_{11}^{(k)}(l_k)}{Z_{12}^{(k)}(l_k)}. \quad (16)$$

Учитывая далее формулы (12), получим равенства

$$\begin{aligned} w^{(1)}(l_1) &= Z_0 D_1^{(n)}, \\ w^{(n)}(0) &= (1+i)R^{(n)} + (1-i), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$D_1^{(n)} = D^{(n)} \exp\left(ik_0 \sum_{k=1}^n l_k\right).$$

Подставляя (17) в (16) и учитывая (15), получим окончательное выражение для коэффициента прохождения $D_1^{(n)}$:

$$D_1^{(n)} = \frac{2}{Z_{\text{вх}}^{(n)} + Z_1} \prod_{k=1}^n \frac{Z_{\text{вх}}^{(k)} - Z_{11}^{(k)}(l_k)}{Z_{12}^{(k)}(l_k)}. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что при $n = 1$, с учетом (11), формула (18) переходит в (13). Отметим, что при выводе формулы (18) нами использовался тот же прием, что и в монографии [10].

Ниже приведены иллюстративные примеры характеристик МДЛ изгибного типа, рассчитанные по формулам (12) и (13). На рис. 2 приведены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения R и прохождения D для одиночной линии изгибного типа с теми же параметрами, что и исходная линия (рис. 1б); при этом на концах линии заданы условия (3)–(5). Отметим, что такая модель является искусственной, так как осуществить эти условия для одиночной линии практически невозможно, но приведенный рисунок показывает специфический результат, обусловленный ими. Специфичность состоит в том, что при $k_0 l = 2\pi/\lambda_0 \rightarrow 0$ приведенные величины R и D стремятся не к нулю и единице соответственно, что характерно для одиночных длинных линий, а к значению 0.707. При увеличении частоты на-

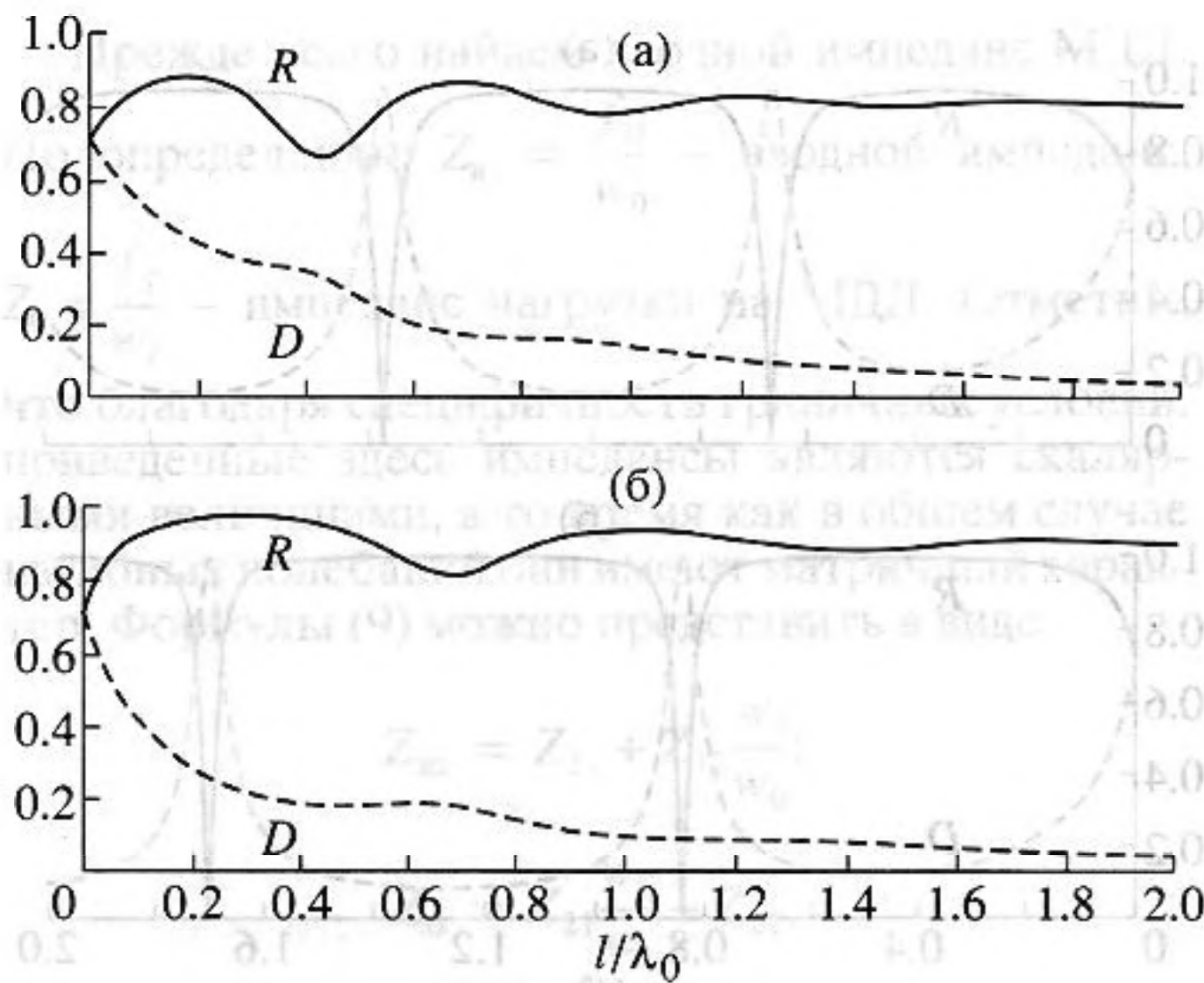


Рис. 4. То же, что на рис. 2, для двухканальной МДЛ с внутренними потерями $\eta = 0.2$.
а - $h_1 = h_2 = h_0$; б - $h_1 = h_2 = 2h_0$.

блюдаются обычные их изменения, обусловленные интерференцией.

На рис. 3а приведены эти же величины для двухканальной линии с толщиной составляющих ее стержней $h_1 = h_2 = 2h_0$, где h_0 – толщина исходной линии. На рис. 3б приведены те же данные для $h_1 = h_2 = 3h_0$. Из сравнения этих рисунков, а также рис. 2, видно, что с увеличением толщины зона больших величин R (≈ 1) расширяется в сторону высоких частот, с одновременным уменьшением величины D .

Можно предполагать, что введение внутренних потерь в МДЛ может улучшить их частотные характеристики. На рис. 4а и 4б приведены результаты для двухканальных линий с толщиной соответственно $h_1 = h_2 = h_0$ и $h_1 = h_2 = 2h_0$. Внутренние потери в линиях характеризуются коэффициентом потерь η , отнесенным к скорости изгибных волн: $c_{из} = c_0(1 - i\eta)$. В обоих случаях была принята величина $\eta = 0.2$. Из рис. 4 видно, что введение потерь “стабилизирует” величину R и дает монотонное спадание величины D .

Acoustic Characteristics of a Multichannel Long Line of the Flexural Type

V. V. Tyutekin

The properties of an acoustic object represented by a multichannel long line of the flexural type are considered. Analytical formulas are obtained for the basic acoustic characteristics of a multichannel long line with an arbitrary number of flexurally oscillating single lines constituting it: the input impedance, the resonance frequencies, and the reflection and transmission coefficients are determined for an insulating multichannel long line, including the case of a cascade connection. Numerical calculations are performed and the plots are presented for the frequency dependences of the reflection and transmission coefficients for various parameters of the constituting lines. It is demonstrated that the acoustic characteristics of insulating multichannel long lines have certain advantages in comparison with the characteristics of similar objects based on single lines.

Приведенные теоретические и расчетные результаты показывают, что даже при двух линиях в составе МДЛ можно реализовать МДЛ-изоляторы изгибного типа, имеющие существенно лучшие акустические характеристики, чем аналогичные акустические объекты, реализуемые на основе одиночных изгибных линий. Конкретные конструктивные параметры МДЛ (в частности, каскадное соединение) могут быть определены путем расчетов по приведенным формулам, в том числе, возможно, с применением методов оптимизации, исходя из конкретных целевых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютекин В.В. Модель плоской активной звукопоглощающей системы // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 238–243.
2. Бойко А.И., Тютекин В.В. Система активного гашения звуковых полей, основанная на методе выделения пространственных гармоник // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 454–460.
3. Guo J., Pan J., Bao C. Actively created quiet zones by multiple control sources in free space // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 3. P. 1492–1501.
4. Wu Z., Varadan V.K., Varadan V.V. Time-domain analysis and synthesis of active noise control systems in ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 3. P. 1502–1511.
5. Wicker K., Arens E. Adaptive compensation of noise in a sonar system // ACUSTICA – acta acustica. 1999. V. 85. Suppl. 1. S. 47.
6. Fuller C.R., Cambou P.E. A distributed active vibration absorber for sound radiation and vibration control // ACUSTICA – acta acustica. 1999. V. 85. Suppl. 1. S. 102.
7. Коротаев Е.В., Тютекин В.В. Экспериментальное исследование активной гасящей системы плоской формы // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 84–88.
8. Acoustics Handbook, Malkom J. Crocker, Editor-in-Chief John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
9. Тютекин В.В. Акустические характеристики многоканальной длинной линии // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 809–815.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.