

УДК 535.5

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ, ДИСПЕРСИИ И ДИФРАКЦИИ НА АМПЛИТУДУ И ПОПЕРЕЧНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ

© 2001 г. А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян

Институт механики НАН Армении
375019 Ереван, просп. Маршала Баграмяна 24^б
E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 26.11.99 г.

Изучается поперечная устойчивость и изменение амплитуды солитонобразных волновых движений, когда в среде существуют нелинейность, дисперсия, дифракция и диссипация. Волновой процесс описывается нелинейным эволюционным уравнением пятой степени. Когда диссипация, дифракция и дисперсия – одного порядка, показано, что устойчивость решения не зависит от диссипации. Она зависит от знака отношений коэффициентов дифракции и дисперсии. При положительном знаке этого отношения солитон устойчив. Этот результат совпадает с условием устойчивости модуляционной нелинейной волны. В случае сильной диссипации получена формула изменения амплитуды солитона и показано, что диссипация не влияет на устойчивость солитона.

За последние годы появились статьи [1–4], где изучаются волны в средах, в которых одновременно существуют нелинейность, дисперсия, дифракция, диссипация. Примерами таких сред являются грунт, поглощающая среда с полостями, композит с пьезосвойствами, электропроводящая несимметричная жидкость с пузырьками газа и т.д. Для описания волны в упомянутых работах используется нелинейное эволюционное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + \frac{1}{2} L \Delta_{\perp} u = p \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + D \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - E \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + N \frac{\partial^5 u}{\partial \tau^5}, \quad (1)$$

где Δ_{\perp} – оператор Лапласа по координатам y и z , $\tau = xc_n^{-1} - t$, c_n – линейная нормальная скорость волны, u – возмущенная нормальная к волне скорость частиц, x – декартова координата, вдоль которой распространяется волна, L , p , E , D и N – соответственно дифракционный, нелинейный, дисперсионный и диссипативные коэффициенты.

В статьях [2, 5] получено решение для солитона, а в работе [6] найдено решение одномерного уравнения Кортевега де-Вриза-Бюргера. В книге [7] решается уравнение Кортевега де-Вриза с правой частью, пропорциональной u , так искусственно учитывается поглощение. В работе [8] впервые ставится вопрос об устойчивости солитонных решений при поперечных возмущениях. Этот вопрос методом обратной задачи решен также в статье [9]. В [7] развит общий подход для ре-

шения задачи поперечной устойчивости солитонов и дано применение к уравнению Кадомцева-Петвиашвили.

Рассмотрим поперечную устойчивость солитонов для сложных законов диссипации, даваемых уравнением (1). Прежде всего обсудим проблему устойчивости солитонных решений уравнения (1), считая, что дифракционные и диссипативные члены малы и имеют одинаковые порядки. Введем следующие обозначения, следуя [7]:

$$\begin{aligned} v &= pu(6E)^{-1}, \quad L(2E)^{-1} = 3\beta^2\sigma, \quad \sigma = \pm 1, \\ x &= E^{-1}t, \quad T = \beta t, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -4\eta^2, \quad (2) \\ DE^{-1} &= \beta^2\kappa, \quad NE^{-1} = \beta^2\xi, \end{aligned}$$

где β – постоянный малый параметр, характеризующий отклонение решения трехмерного диссипативного эволюционного уравнения от одномерного недиссипативного решения соответствующего уравнения, T – медленно меняющееся время. $4\eta^2$ – скорость распространения солитона, при этом, как будет показано далее, $2\eta^2$ есть его амплитуда. В переменных θ , T , y , z уравнение (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-4\eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + 6v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) = \\ = -\beta \frac{\partial^2 v}{\partial T \partial \theta} - 3\beta^2 \sigma \Delta_{\perp} v + \kappa \beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \beta^2 \xi \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде:

$$v = v_0 + \beta v_1 + \beta^2 v_2 + \dots \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) в нулевом порядке, получим

$$L_0(v_0) = -4\eta^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 6v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет солитонное решение следующего вида [7]

$$v_0 = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta \theta_2, \quad \theta_2 = \theta - \theta_0(T, y, z), \quad (6)$$

где θ_0 — некоторая подлежащая определению добавочная фаза, характеризующая малые поперечные и диссипативные возмущения. Нетрудно убедиться, что при выбранных порядках (2) можно считать величину η постоянной [7, 8].

В порядках β и β^2 из уравнения (3) получаем

$$L(v_n) = -4\eta^2 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + 6 \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 v_n) + \frac{\partial^3 v_n}{\partial \theta^3} = F_n, \quad (7)$$

($n = 1, 2$).

В силу (6) для F_1, F_2 можно записать

$$F_1 = -\frac{\partial v_0}{\partial T} = \frac{\partial v_0 \partial \theta}{\partial \theta \partial T}, \quad (8)$$

$$F_2 = -\frac{\partial v_1}{\partial T} + 3\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} v_0 d\theta' + \kappa \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \xi \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} - 6v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}. \quad (9)$$

Введем сопряженный к L оператор L^* , причем $L^*(v_0) = -L_0(v_0) = 0$. Можно показать, что выражения $v_0 L(v_n) - v_n L^*(v_0)$ есть производная по θ от некоторой функции, содержащей произведения v_0, v_n и их производных [7]. Тогда, считая, что v_n ограничена на бесконечности, можно получить следующие условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_1 d\theta = 0, \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_2 d\theta = 0. \quad (11)$$

Как показано в [7], решение уравнения (7) при $n = 1$ имеет вид

$$v_1 = (2\eta^2)^{-1} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} \left(2v_0 + \theta_2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right). \quad (12)$$

Учитывая, что вклад в (11) дают только четные функции от θ_2 , поскольку

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0 \partial \theta}{\partial \theta \partial y}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} = -\frac{\partial v_0 \partial \theta}{\partial \theta \partial z},$$

можно заменить в (9)

$$\Delta_{\perp} v_0 \approx -\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \Delta_{\perp} \theta_0,$$

тогда условие (11) после интегрирования по частям дает

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} - 16\sigma \eta^2 \Delta_{\perp} \theta_0 + \Lambda = 0, \quad (13)$$

где

$$\Lambda = 16\kappa \eta^2 (3f_0)^{-1} f_1 - 16\xi \eta^2 (3f_0)^{-1} f_2$$

$$f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2 d\theta, \quad f_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta, \quad f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta.$$

Учитывая (6), для f_0, f_1 и f_2 получится

$$f_0 = \frac{16}{3} \eta^3, \quad f_1 = \frac{64}{15} \eta^5, \quad f_2 = \frac{256}{21} \eta^7. \quad (14)$$

Записывая

$$\theta_0 = \theta_1 + \Lambda (64\sigma \eta^2)^{-1} (y^2 + z^2),$$

можно уравнение (13) записать в виде

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T^2} - 16\sigma \eta^2 \Delta_{\perp} \theta_1 = 0. \quad (15)$$

Так как $\theta_0 - \theta_1$ не зависит от времени T , оно не влияет на устойчивость. Зависимость θ_0 от поперечных координат приводит лишь к сдвигу фаз как для решения (6), так и для (12). По уравнению (15) можно судить об устойчивости солитона. При $\sigma = 1$ оно будет гиперболического типа и θ_1 конечно, что соответствует устойчивому солитону, т.е. малому начальному возмущению относительно нулевого решения соответствует малое изменение решения в данный момент. При $\sigma = -1$ уравнение (15) будет эллиптического типа, то есть при $T \rightarrow \infty, \theta_1 \rightarrow \infty$ солитонное решение (6) и (12) будет неустойчивым. Из соотношения (2) следует условие устойчивости

$$L_1/E > 0. \quad (16)$$

Физический смысл (16) заключается в том, что поперечная устойчивость солитона при наличии диссипации определяется знаком отношения коэффициентов L_1 дифракции и E дисперсии. Из неравенства (16) следует также, что при наличии порядков (2) диссипация не влияет на поперечную устойчивость солитона. Интересно отметить, что (16)

совпадает с условием устойчивости волн модуляции [3] в адиабатическом приближении.

Для электропроводящей жидкости с пузырьками газа в магнитном поле, близком по направлению к нормали волны, (16) имеет вид

$$c_n^2 - a_1^2 > 0, \quad (17)$$

где a_1 – скорость Альфена [3].

Рассмотрим далее относительно сильное поглощение по сравнению с дифракцией, для которого последние два равенства в соотношениях (2) запишутся

$$DE^{-1} = \beta\kappa, \quad NE^{-1} = \beta\xi. \quad (18)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-4\eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + 6v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) = \\ = -\beta \frac{\partial^2 v}{\partial T \partial \theta} - 3\beta^2 \sigma \Delta_{\perp} v + \beta\kappa \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \beta\xi \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношения (4)–(6) остаются в силе, а в (7) следует считать

$$F_1 = -\frac{\partial v_0}{\partial T} + \kappa \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \xi \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4}, \quad (20)$$

$$F_2 = -6v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial v_1}{\partial T} - 3\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} v_0 d\theta' + \\ + \kappa \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \xi \frac{\partial^4 v_1}{\partial \theta^4}. \quad (21)$$

В силу новых порядков диссипации (18), считаем, что $\eta = \eta(T)$ переменная, тогда, учитывая (6), можно записать

$$\frac{\partial v_0}{\partial T} = -\frac{\partial \theta_0}{\partial T} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} \left(2v_0 + \theta_2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right). \quad (22)$$

Из условия (10), учитывая (20), (22) и (14), после несложных вычислений можно получить следующее уравнение для η

$$-\frac{3}{2\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{4\kappa}{5} \eta^2 + \frac{16\xi}{7} \eta^4 = 0. \quad (23)$$

Для электропроводящей, но немикрополярной жидкости с пузырьками газа $\xi = 0$, тогда из (23) можно получить следующее решение

$$\eta = \eta(0) \left[1 + \frac{16}{15} \kappa T \eta^2(0) \right]^{-1/2}. \quad (24)$$

Другим методом соотношение (24) получено в статье [6]. Так как, в силу (2), для рассматриваемых

сред $\kappa T > 0$ амплитуда солитона уменьшается по закону (24) в пространстве при распространении.

В общем случае, когда $\xi \neq 0$, решение уравнения (23) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{20\xi}{7\kappa} \ln \frac{\eta^2}{\eta^2(0)} - \eta^{-2} + \eta^{-2}(0) - \\ - \frac{20\xi}{7\kappa} \ln \left(\eta^2 - \frac{7\kappa}{20\xi} \right) \left[\eta^2(0) - \frac{7\kappa}{20\xi} \right]^{-1} = -\frac{16}{15} \kappa T. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) можно решить численно. Однако уже из (23) видно, что при $\xi \eta^2 < 7\kappa/20$ имеет место затухание η , т.е. при $T \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$. В то же время приближенное решение (25), для малых ξ/η показывает, что при достаточно больших $\eta(0)$, для конечных T может быть увеличение амплитуды солитона.

Решение (7) при $n = 1$ будем искать в виде

$$v_1 = v_2 + q, \quad (26)$$

где v_2 есть решение (7) для $n = 1$, когда в правой части (20) и в выражениях (22) берутся только первые слагаемые. При этом v_2 имеет вид (12). Величина q есть решение уравнения

$$L(q) = \kappa \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \xi \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} + \mu \left(2v_0 + \theta_2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right). \quad (27)$$

Оператор $L(q)$ дается левой частью уравнения (7) при $n = 1$ заменой v_1 на q . Величина μ дается из (22) и (23) и равна

$$\mu = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{5} \eta^2 \kappa - \frac{16}{7} \xi \eta^4 \right).$$

Для определения вклада v_2 в (11), (21) согласно тому, что отличный от нуля вклад в (11) дают лишь четные слагаемые $\partial v_2 / \partial T$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v_2}{\partial T} v_0 d\theta = \\ = \frac{3}{16\eta^2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} f_0 + \frac{1}{3\eta^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} \left(\frac{\eta\chi}{5} - \frac{4}{7} \xi \eta^4 \right) f_3, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$f_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_2^2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

Следуя [7], введя $y_1 = \text{th} \eta \theta_2$, можно из (27) получить для q следующее уравнение

$$\frac{d^2 q}{dy^2} (1 - y^2) - 2y \frac{dq}{dy} + \left(12 - \frac{4}{1 - y^2} \right) q = 16 \xi \eta^3 y (1 - y^2) (2 - 3y^2) - 4 \eta \kappa y + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} + 2 \mu (y - 1) [\eta (1 - y^2)]^{-1}. \quad (29)$$

Приведем решение выражения (29) для случая $\xi = 0$, что выполняется для широкого класса сред, например, электропроводящей симметричной смеси. Оно имеет вид:

$$q = \frac{4}{15} \eta \kappa y (y^2 - 1) \left\{ \frac{2}{y} + \ln \left[|y|^{-1} \frac{(1 - y)^2}{1 + y} \right] + (1 + y)^{-1} \right\} + \frac{2}{15} (1 - y^2) \eta \kappa y \left(y^{-1} \ln \frac{1 + y}{1 - y} - \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1 + y}{1 - y} - \ln \frac{y^2}{1 - y^2} \right). \quad (30)$$

Вклад q в (11) и (21) дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial T} v_0 d\theta_2 = -4 \eta^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial T} \int_{-1}^{+1} q y dy + \frac{3}{16} \kappa^2 q_2. \quad (31)$$

Теперь уравнение для θ_0 примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} - 16 \eta^2 \Delta_{\perp} \theta_0 + \chi \frac{\partial \theta_0}{\partial T} - \kappa^2 f_0^{-1} q_2 \eta^2 = 0. \quad (32)$$

Вид величины q_2 не приводится из-за его громоздкости, тем более она не влияет на устойчивость, так как не зависит от θ_2 , что показано при выводе (15) из (13).

В уравнении (32) χ имеет следующий вид:

$$\chi = \frac{76}{45} \eta^2 \kappa + \frac{14}{15} \eta^2 \kappa \int_{-1}^{+1} (1 - y^2) y^2 \ln^2 \frac{1 + y}{1 - y} dy + \frac{144}{15} \eta^2 \kappa P,$$

$$P = \int_0^1 (1 - y^2) \left(1 - \frac{y}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \right) y \times \quad (33)$$

$$\times \left[(1 - y^2) \left(\ln \frac{1 + y}{1 - y} - \frac{y}{4} \ln^2 [(1 + y)(1 - y)^{-1}] \right) - 2y \right] dy.$$

Интеграл P имеет численное значение -0.03 , однако добавленное за этот счет слагаемое в (33)

будет меньше $\frac{76}{45} \kappa \eta^2$ и, как видно из (33), по-прежнему выполняется условие, $\chi \kappa^{-1} > 0$.

Аналогично выводу уравнения (15), полагаем, что

$$\theta_0 = \theta_1 - (y^2 + z^2) q_2 \kappa^2 (64 \sigma f_0)^{-1}.$$

Для θ_1 можно получить соотношение

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T^2} - 16 \eta^2 \sigma \Delta_{\perp} \theta_1 + \chi \frac{\partial \theta_1}{\partial T} = 0. \quad (34)$$

При $\sigma = -1$ уравнение (34) будет эллиптического типа, что для постоянных η приводит к неустойчивости решения [12].

Покажем, что это так и для η , определяемого выражением (24).

Уравнение (34) преобразуем подстановкой

$$\theta_1 = A(T) \exp[i(k_1 y + k_2 z)],$$

где $k_1^2 + k_2^2 = k^2$. Тогда (34) сводится к уравнению

$$\frac{d^2 A}{dX_1^2} + \frac{a}{X_1} \frac{dA}{dX_1} + \frac{b}{X_1 A} = 0, \quad (35)$$

где $a = \frac{15}{16} \mu_{\perp}$, $b = \frac{225}{16} \chi^2 \sigma \eta^{-2}(0)$, $X_1 = 1 + \frac{16}{15} \chi T \eta^2(0)$.

$$\mu_{\perp} = \frac{76}{45} +$$

$$+ \frac{14}{15} \int_{-1}^{+1} (1 - y^2) y^2 \ln[(1 + y)(1 - y)^{-1}] dy - \frac{1.44}{3}. \quad (36)$$

Так как $\beta > 0$, $D > 0$, тогда $\kappa E > 0$ и для больших x , причем $x > 0$, $TE^{-1} > 0$ в силу (2). Поэтому $X_1 > 0$ и велико.

Решение уравнения при $b > 0$ имеет вид [13]

$$A = X_1^{(1-a)/2} Z_{\nu} [2(bX_1)^{1/2}], \quad (37)$$

где Z_{ν} – функция Бесселя, $\nu = |1 - a|$.

Асимптотика (37) при $X_1 \rightarrow \infty$, когда $b > 0$, следующая по порядку [14],

$$A \sim X_1^{(1-2a)/4}. \quad (38)$$

Таким образом при $b > 0$ или $\sigma = 1$ и $a > 1/2$, при $X_1 \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 0$ и решение будет устойчивым можно показать, что, согласно (36), имеет место $a > 1/2$ и, следовательно, при $\sigma = 1$, диссипативный солитон устойчив, кстати, недиссипативный солитон при $\sigma = 1$ также устойчив. Следовательно, диссипация не влияет на поперечную устойчивость.

В случае $b < 0$ или $\sigma = -1$ из (37) видно, что

$$A \sim X_1^{(1-2a)/4} \exp[2(-bX_1)^{1/2}], \quad (39)$$

т.е. $A \rightarrow \infty$ при $X_1 \rightarrow \infty$ и диссипативный солитон, также как и недиссипативный солитон, неустойчив.

Следует отметить, что полученное таким образом из условия $\sigma = 1$ условие (16) согласуется с условием поперечной устойчивости волн модуля-

ции [3, 10, 11]. Полученные решения согласуются также с результатами работы [15].

Таким образом приходим к выводу, что диссипация не влияет на поперечную устойчивость солитона, определяемого решением эволюционных уравнений пятой степени типа (1) или (2) как в случае слабой диссипации, когда диссипация и дифракция имеют одинаковый порядок, так и в случае сильной диссипации. Устойчивость зависит от знака отношения коэффициентов дифракции и дисперсии, причем при положительном знаке солитон устойчив. Этот результат совпадает с условием модуляционной устойчивости нелинейных волн.

Получены также выражения для амплитуды солитона и решение эволюционных уравнений солитонного типа, включая первый порядок. При этом амплитуда солитона слабо затухает со временем, причем ее переменность не влияет на поперечную устойчивость солитона.

Квадратичное по поперечным координатам слагаемое в добавочной фазе не влияет на поперечную устойчивость, а приводит только к сдвигу фаз в решениях первого и второго порядка.

Авторы благодарят рецензента за ценные советы, а также проф. С.Г. Саакяна за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagdoyev A.G., Shekoyan A.V. Wave beams in viscoelastic dispersive non-linear initially deformed medium with free surface // *Int. J. Non-linear Mechanics*. 1997. V. 32. № 2. P. 385–392.
2. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // *Акустический журнал*. 1999. Т. 45. № 2. С. 149–156.
3. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Распространение волн в микрополярной жидкости // *Изв. АН АрмССР. Механика*. 1983. № 5. С. 3–16.

4. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волновые пучки в упругом, вязком, дисперсионном и теплопроводящем пьезодиэлектрическом слое // *Изв. НАН Армении. Механика*. 1995. Т. 48. № 1. С. 64–72.
5. Шекоян А.В. Приближенное трехмерное солитонное решение при наличии дисперсии и диссипации // *Изв. НАН Армении, Физика*, 1998. Т. 33. № 4. С. 187–190.
6. Карпман В.И., Маслов Е.М. Структура хвостов, образующихся при воздействии возмущений на солитоны // *ЖЭТФ*, 1978. Т. 75. № 2. С. 504–517.
7. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 478 с.
8. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // *АН СССР*. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.
9. Захаров В.Е. Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов // *Письма в ЖЭТФ*. 1975. Т. 22. № 7. С. 364–367.
10. Шекоян А.В. Влияние дислокации на устойчивость и фокусирование пучков нелинейных ультразвуковых волн // *Изв. АН АрмССР. Физика*. 1988.
11. Bagdoyev A.G., Shekoyan A.V. Focusing on Nonlinear Ultrasonic waves in Viscous. Thermoelastic Materials with Spherical Inclusions // *Phys. Stat. Solidi (a)*/ 1985. V. 89. P. 499–507.
12. Узем Д.Б. Вариационные методы и их приложения к волнам на воде / *Нелинейная теория распространения волн*. Под ред. Баренблатта Г.И. М.: Мир, 1979. С. 12–33.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. тех.-теор. лит., 1951. 464 с.
15. Averkiou M.A., Hamilton M.F. Nonlinear distortion of short pulses radiated by plane and focused circular pistons // *J. Acoust. Soc. Am*. 1997. V. 102. № 5. P. 2539–2548.

Effect of the Dissipation, Dispersion, and Diffraction on the Amplitude and the Transverse Stability of Solitons

A. G. Bagdoyev and A. V. Shekoyan

The transverse stability and the amplitude variations of soliton-like wave motions in the presence of nonlinearity, dispersion, diffraction, and dissipation in the medium are studied. The wave process is described by a quintic nonlinear evolution equation. It is demonstrated that the stability of the solution does not depend on the dissipation when the dissipation, diffraction, and dispersion are of the same order of magnitude. It depends on the sign of the ratio of the diffraction and dispersion coefficients. When the sign is positive, the soliton is stable. This result coincides with the stability condition for a nonlinear modulation wave. For the case of strong dissipation, an expression describing the soliton amplitude is obtained and the dissipation is shown to have no effect on the soliton stability.