

УДК 534.222:539.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ СЛОЕ ПО СМЕЩЕНИЯМ ЕГО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2001 г. А. О. Ватульян, В. М. Драгилев*, Л. Л. Драгилева**

*Ростовский государственный университет, механико-математический факультет
344090 Ростов-на-Дону, ул. Зорге 5
E-mail: vatulyan@mail.tp.ru*

**Ростовский государственный университет, научно-исследовательский институт физики
344090 Ростов-на-Дону, ул. Стачки 194
E-mail: vdragil@uic.rnd.runnet.ru*

***Ростовский государственный педагогический университет, факультет математики
344082 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая 33
E-mail: grekov@edu.donpac.ru*

Поступила в редакцию 20.11.2000 г.

Для модели вынужденных установившихся колебаний упругого слоя в условиях плоской деформации рассмотрена обратная задача о восстановлении волнового поля контактных напряжений, создаваемых внешней нагрузкой, по смещениям свободной поверхности. Решение строится двумя способами: 1) сведением задачи к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с регуляризацией по Тихонову; 2) путем разложения решения по дискретному набору волн. Установлена примерно одинаковая эффективность этих подходов в данной модели. Проанализированы возможности адекватной реконструкции поля источника по данным измерений в дальней зоне, в которой наблюдается конечное число распространяющихся волновых мод.

К сравнительно новым разделам теории упругости относится класс обратных задач, в которых напряженно-деформированное состояние среды требуется восстановить по неполным характеристикам, заданным на границе [1–7]. Интерес к подобным задачам вызван потребностями прикладных отраслей, таких как структурная интенсиметрия, виброустойчивость сооружений, дефектоскопия. Граничные обратные задачи теории упругости являются некорректными в смысле А.Н. Тихонова [8, 9], что роднит их с обратными задачами других областей науки и техники [10].

Граничная задача о реконструкции гармонического по времени акустического поля в линейно-упругой среде впервые была рассмотрена в работах [4, 5]. Постановка задачи подразумевает, что колебания среды вызваны внешними контактными напряжениями, а исходными данными для восстановления волновой картины служат амплитуды смещений, измеренные на доступном для наблюдений участке свободной поверхности. Развитый в [4, 5] подход к восстановлению волнового поля основан на его разложении по дискретному набору решений, причем, в духе метода сингулярных разложений [11], порядок редуцированной системы уравнений играет роль регуляризующего параметра. Задача допускает также и другой подход [1, 2, 7], в котором она сводится к интегральному урав-

нению Фредгольма 1-го рода с гладким ядром, и решение ищется методом регуляризации А.Н. Тихонова [8, 9].

В частной модели, подробно изученной в статьях [4, 5], особенности геометрии позволили отвлечься от сторонних контактных нагрузок и разлагать решение по нормальным волнам. Настоящая работа, в отличие от [4, 5], посвящена реконструкции поля в области поверхностного контакта. В работе преследуется цель испытать на модельных примерах и сравнить возможности обоих названных подходов – метода дискретных разложений [4, 5] и метода Тихонова.

Рассмотрим упругий слой, занимающий область $[-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h]$ и совершающий вынужденные установившиеся колебания в условиях плоской деформации. Считается, что нижняя граница слоя ($y = 0$) жестко закреплена, к верхней границе ($y = h$) приложена внешняя нормальная нагрузка вида $\exp(-i\omega t)q(x)$, распределенная на отрезке $x \in [X_1, X_2]$. Динамика слоя подчинена уравнениям Ляме [12]. Основные параметры модели – коэффициент Пуассона ν и безразмерная частота $k = \omega h \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$, где ρ – плотность; λ, μ – коэффициенты Ляме. Ниже толщина слоя h принимается за единицу длины; во всех числовых примерах $\nu = 0.3$.

Поставим обратную задачу об отыскании нагрузки $q(x)$ по данным о нормальных смещениях свободной поверхности слоя $u_y(x, h) \equiv u(x)$; функция смещений $u(x)$ задается на интервале $x \in [X_3, X_4]$, не пересекающемся с $[X_1, X_2]$. Функция $q(x)$ связана с $u(x)$ посредством интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром,

$$\int_{x_1}^{x_2} k(x-x')q(x')dx' = u(x), \quad x \in [X_3, X_4], \quad (1)$$

где $k(x-x')$ – соответствующая компонента матрицы Грина [13]. В представлении Фурье имеем

$$k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(p)e^{ip\zeta} dp, \quad (2)$$

где $\zeta = x - x'$, контур интегрирования σ пролегает вдоль вещественной оси, обходя полюсы по правилам, вытекающим из принципа предельного поглощения [13]. Фурье-образ $K(p)$, явный вид которого приведен в монографии [13], представляет собой четную мероморфную функцию (вещественную при вещественных p). Вещественные полюсы, отвечающие незатухающим однородным волнам, возникают на частотах, больших критической; количество их растет с увеличением частоты, оставаясь конечным [13].

Рассмотрим решение в приближении дальней зоны. На нерезонансных частотах все вещественные полюсы функции $K(p)$ простые, и в дальней зоне (т.е. при $|\zeta| \rightarrow \infty$) справедлива асимптотическая оценка

$$k(\zeta) = k_{\infty}(\zeta) + O[\exp(-c|\zeta|)], \quad (3a)$$

$$k_{\infty}(\zeta) = i \sum_{m=1}^M (\pm R_m) \exp(\pm ip_m|\zeta|), \quad (3b)$$

где R_m – вычет функции $K(p)$ в m -ом положительном полюсе p_m , нижние знаки “минус” применяются для волн с отрицательной групповой скоростью, $c > 0$ – расстояние от вещественной оси p до ближайшего комплексного полюса. Мнимая часть ядра (2) описывается главным членом (3б) асимптотики (3) точно.

Численные эксперименты по реконструкции нагрузки проводились преимущественно на двух частотах, $\kappa = 3$ и $\kappa = 6$, на которых имеется, соответственно, $M = 3$ и $M = 6$ однородных мод (групповые скорости всех волн положительны). Волновые числа лежат в интервалах $1.6 < p_m < 6$ – при $\kappa = 3$ и $2.7 < p_m < 12$ – при $\kappa = 6$. Численное сравнение ядра $k(\zeta)$ (2) с его вырожденной конечномерной составляющей (3б) показало, что уже при $|\zeta| \geq 2$ относительный вклад остаточного члена асимптотики (3a) на обеих частотах не превышает долей процента и быстро убывает с увеличением $|\zeta|$ (расчеты комплексных полюсов дают $c \approx 3.8$

для обеих частот). В приведенных ниже примерах, в силу выбора областей $[X_1, X_2]$ и $[X_3, X_4]$, выполнено неравенство $|\zeta| \geq 5$, что дало основания заменить ядро его конечномерной частью (3б). Такая замена не только оправдана в техническом отношении, но и вполне отвечает физической ситуации, в которой экспоненциально подавленные неоднородные моды, ответственные за остаточное слагаемое в (3a), неразличимы на фоне случайных ошибок. В сходных примерах с меньшими расстояниями $|\zeta| \sim 1-2$ было непосредственно проверено, что реконструкция нагрузки с расчетами ядра по точной формуле (2) и приближенной (3б) дает идентичные результаты.

Вследствие гладкости ядра, интегральный оператор уравнения (1) является вполне непрерывным. Это означает неограниченность обратного оператора и требует регуляризации операторного уравнения [8]. Регуляризующие конечноразностные схемы для таких уравнений в методе Тихонова детально разработаны [9]; в наших вычислениях был использован стандартный вариант алгоритма со стабилизатором 1-го порядка. При расчетах функция смещений задается дискретным набором значений $\{u_j = u(x_j), j = 1, \dots, J\}$, отвечающих выбранным точкам x_j интервала $[X_3, X_4]$. Входные параметры алгоритма включают в себя массив исходных данных $\{x_j, u_j\}$, параметр регуляризации α [8] и дискретный параметр J' – число узлов конечно-разностной сетки на отрезке $[X_1, X_2]$. Решение строится в виде массива из J' значений функции $q(x)$, взятых в равноотстоящих точках отрезка.

Наиболее естественная реализация метода дискретных разложений в обсуждаемой модели выглядит следующим образом. Пусть $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ – полный ортонормированный набор функций в пространстве $L_2[X_1, X_2]$, $q_N(x)$ – аппроксимация искомого решения $q(x)$ отрезком его обобщенного ряда Фурье:

$$q_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x). \quad (4)$$

Формально подставив (4) в (1), приходим к операторному уравнению $Aa = u$, где $a = \{a_n\}$, $u = \{u_j\}$, $A = \{A_{jn}\}$ – прямоугольная матрица с элементами

$$A_{jn} = \int_{x_1}^{x_2} k(x_j - x') f_n(x') dx',$$

$$(n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J).$$

В соответствии с идеей метода [4, 5], коэффициенты a_n определяются из условия минимальности функционала невязки, т.е. из самосопряженного уравнения

$$Ba = v, \quad (5)$$

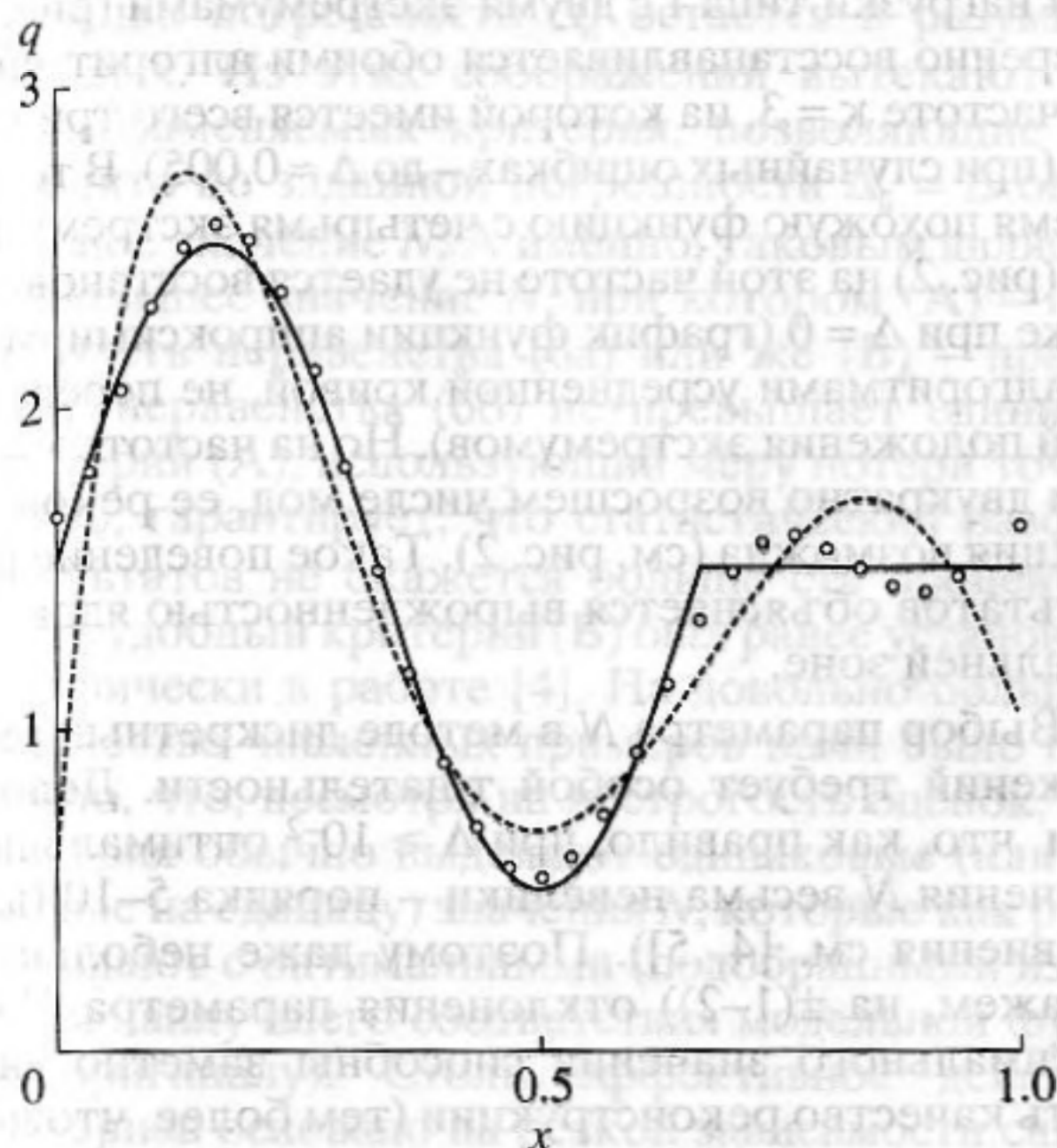


Рис. 1. Реконструкция нагрузки типа I. $\Delta = 0.02$; $N = 7$, $\alpha = 10^{-7}$.

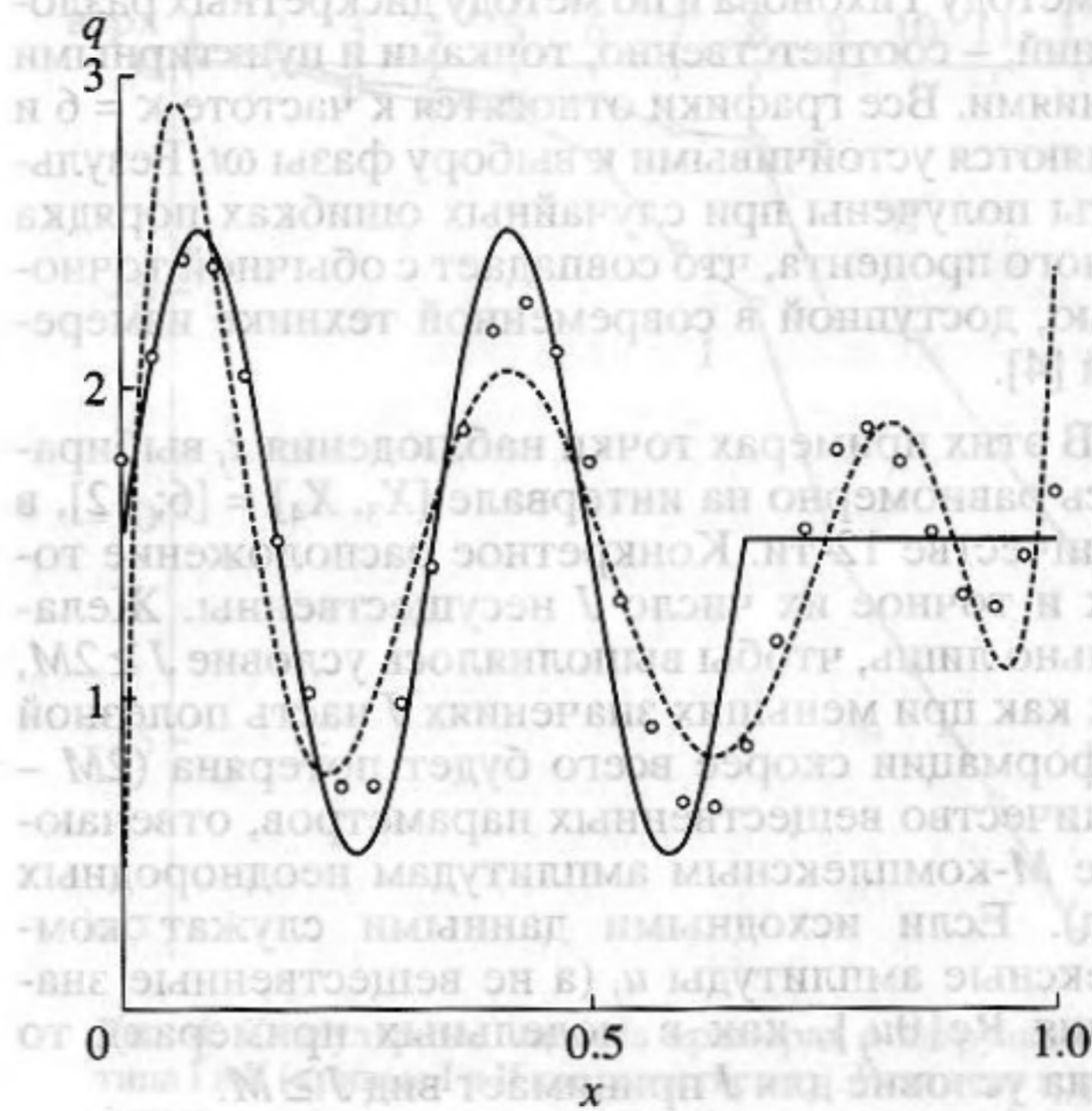


Рис. 2. Реконструкция нагрузки типа I. $\Delta = 0.02$; $N = 7$, $\alpha = 10^{-9}$.

где $B = A^*A$, $v = A^*u$, A^* – эрмитово-сопряженная матрица. Оптимальное числовое значение N должно быть согласовано с погрешностью исходных данных (способы такого согласования обсуждаются ниже); предел $N = \infty$ отвечает точно заданной правой части уравнения (1). Обоснование алгоритма как регуляризирующего, в смысле теории Тихонова [8], имеется в методе проекций [10].

В качестве базисных функций $f_n(x)$ были использованы ортонормированные на отрезке $[X_1, X_2]$ полиномы Лежандра.

Чтобы упростить сравнение результатов, модельные функции нагрузки $q(x)$ задавались вещественными. В связи с этим уравнение (1) заменялось его вещественным аналогом с ядром $\text{Re}\{\theta k_\infty(\zeta)\}$ и правой частью $\text{Re}\{\theta u(x)\}$, где $\theta = \exp(-i\omega t)$ – заданный фазовый множитель. Подобным же образом модифицировалось уравнение (5). Тем самым вещественность нагрузки учитывалась как априорный факт (за счет чего эффективность алгоритмов, грубо говоря, удваивалась).

Приведем результаты численного эксперимента. В расчетах были задействованы два типа модельных функций нагрузки $q(x)$: (I) комбинации из синусообразных и кусочно-постоянных функций, заданные на отрезке $[X_1, X_2] = [0; 1]$; (II) функция

$q(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, взятая на отрезке $[X_1, X_2] = [-0.99; 0.99]$, которая в статическом приближении моделирует действие прямоугольного штампа [14]. Массивы исходных данных формировались исходя из численного решения прямой задачи с конкретной нагрузкой $q(x)$, с наложением на числа u_i

относительной случайной ошибки, равномерно распределенной в заданном интервале $[-\Delta, \Delta]$. Как обычно, численное решение обратной задачи сравнивалось затем с исходной модельной функцией $q(x)$. Типичные примеры таких сравнений даны на рис. 1–3. Модельные функции изображены везде сплошными линиями; решения, полученные

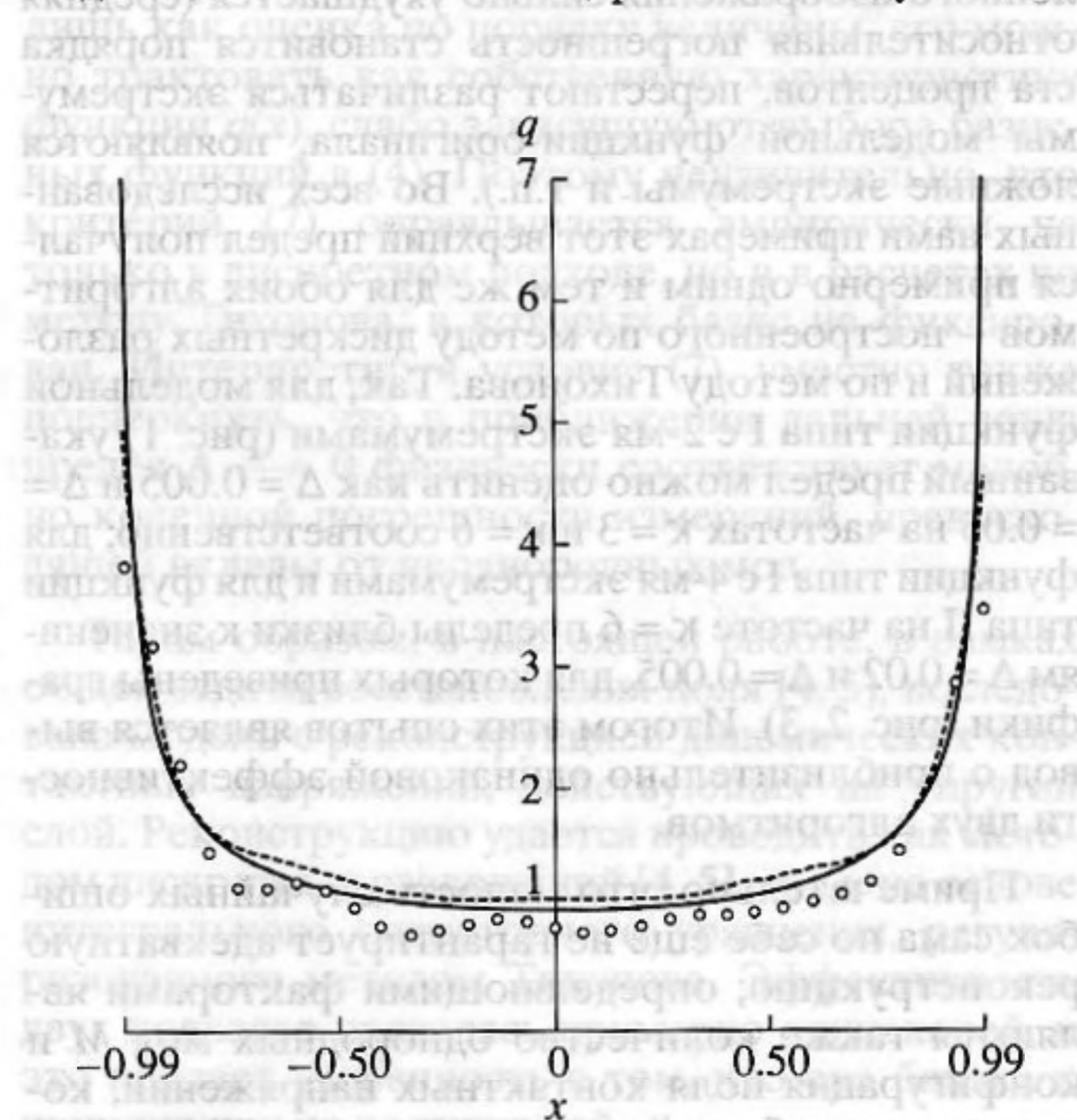


Рис. 3. Реконструкция нагрузки типа II. $\Delta = 0.005$; $N = 9$, $\alpha = 10^{-9}$.

по методу Тихонова и по методу дискретных разложений, – соответственно, точками и пунктирными линиями. Все графики относятся к частоте $\kappa = 6$ и являются устойчивыми к выбору фазы ωt . Результаты получены при случайных ошибках порядка одного процента, что совпадает с обычной точностью, доступной в современной технике измерений [4].

В этих примерах точки наблюдения x_j выбирались равномерно на интервале $[X_3, X_4] = [6; 12]$, в количестве 12-ти. Конкретное расположение точек и точное их число J несущественны. Желательно лишь, чтобы выполнялось условие $J \geq 2M$, так как при меньших значениях J часть полезной информации скорее всего будет потеряна ($2M$ – количество вещественных параметров, отвечающее M -комплексным амплитудам неоднородных мод). Если исходными данными служат комплексные амплитуды u_j (а не вещественные значения $\text{Re}\{\theta u_j\}$, как в модельных примерах), то тогда условие для J принимает вид $J \geq M$.

Значение параметра J' в расчетах по методу Тихонова равнялось 30-ти (контрольные трехкратные увеличения параметра никак не отражались на результатах). Способы определения параметра α изложены в [8, 9, 15].

В серии численных экспериментов производилось плавное увеличение параметра Δ (с надлежащей подстройкой параметров регуляризации α и N). При этом выяснялась приблизительная (как оценка по порядку величины) верхняя граница значений Δ , начиная с которой качество восстановленного изображения сильно ухудшается (средняя относительная погрешность становится порядка ста процентов, перестают различаться экстремумы модельной функции-оригинала, появляются ложные экстремумы и т.п.). Во всех исследованных нами примерах этот верхний предел получался примерно одним и тем же для обоих алгоритмов – построенного по методу дискретных разложений и по методу Тихонова. Так, для модельной функции типа I с 2-мя экстремумами (рис. 1) указанный предел можно оценить как $\Delta = 0.005$ и $\Delta = 0.05$ на частотах $\kappa = 3$ и $\kappa = 6$ соответственно; для функции типа I с 4-мя экстремумами и для функции типа II на частоте $\kappa = 6$ пределы близки к значениям $\Delta = 0.02$ и $\Delta = 0.005$, для которых приведены графики (рис. 2, 3). Итогом этих опытов является вывод о приблизительно одинаковой эффективности двух алгоритмов.

Примечательно, что малость случайных ошибок сама по себе еще не гарантирует адекватную реконструкцию; определяющими факторами являются также количество однородных мод M и конфигурация поля контактных напряжений, которая должна быть “достаточно простой” (последнее условие уточнено ниже). Это хорошо иллюстрируется следующим примером. Модельная функ-

ция нагрузки типа I с двумя экстремумами (рис. 1) уверенно восстанавливается обоими алгоритмами на частоте $\kappa = 3$, на которой имеется всего три моды (при случайных ошибках – до $\Delta \approx 0.005$). В то же время похожую функцию с четырьмя экстремумами (рис. 2) на этой частоте не удастся восстановить даже при $\Delta = 0$ (график функции аппроксимируется алгоритмами усредненной кривой, не передающей положения экстремумов). Но на частоте $\kappa = 6$, при двукратно возросшем числе мод, ее реконструкция возможна (см. рис. 2). Такое поведение результатов объясняется вырожденностью ядра (3) в дальней зоне.

Выбор параметра N в методе дискретных разложений требует особой тщательности. Дело в том, что, как правило, при $\Delta \approx 10^{-2}$ оптимальные значения N весьма невелики – порядка 5–10 (для сравнения см. [4, 5]). Поэтому даже небольшие (скажем, на $\pm(1-2)$) отклонения параметра N от оптимального значения способны заметно снижать качество реконструкции (тем более, что при неоправданном завышении числа N статистическая неустойчивость результатов растет катастрофически).

Для оценки наибольшего допустимого значения N нужно исходить из чувствительности результатов к случайным погрешностям. Пусть \mathbf{u} , $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ – два вектора исходных данных, полученные в независимых измерениях. Обозначим через \mathbf{a} , $\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}$ соответствующие векторы решений задачи (5) при некотором N ; $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{a}$ – приближенное решение прямой задачи, восстановленное из решения обратной; $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_N > 0$ – сингулярные числа [4, 11] матрицы \mathbf{B} ; $C_N = \sigma_1/\sigma_N$ – ее число обусловленности; $S_N = \sigma_1^{-1} + \dots + \sigma_N^{-1}$. В формализме сингулярных разложений [4, 11] легко доказать неравенство $\|\delta\mathbf{a}\| \leq S_N \|\delta\mathbf{u}\|$, или, что то же самое,

$$\Delta_a \leq S_N \Delta_u \|\mathbf{u}\| / \|\mathbf{a}\|, \quad (6a)$$

где $\Delta_a = \|\delta\mathbf{a}\|/\|\mathbf{a}\|$, $\Delta_u = \|\delta\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\|$, нормы берутся в евклидовых пространствах R^N и R^J . С учетом ортонормированности набора $\{f_n\}$ в (4), Δ_a есть интересующая нас характерная погрешность решения $q_N(x)$; величину Δ_u правомерно отождествить со средней погрешностью исходных данных Δ . Из сингулярного разложения для \mathbf{a} имеем $\|\mathbf{a}\| \geq \sigma_1^{-1} \|\mathbf{u}\|$. В силу быстрого, квазиэкспоненциального [4] убывания последовательности сингулярных чисел, можно положить $S_N \approx \sigma_N^{-1}$; кроме того, $\|\mathbf{u}'\| \approx \|\mathbf{u}\|$. Подставив эти результаты в (6a), получим ограничение по порядку величины,

$$\Delta_a \leq C_N \Delta_u. \quad (6b)$$

Правые части неравенств (6) дают для Δ_a завышенную оценку, и пока они сами не превышают

единицы, погрешность Δ_a остается в разумных пределах. Из этих соображений вытекают два взаимозаменяемых критерия, позволяющие определить по заданной погрешности $\Delta_u = \Delta$ оптимальное значение N . А именно, таковым является наибольшее значение N , при котором (А) – правая часть неравенства (6а) или же (Б) – правая часть неравенства (6б) не превышает единицы. Критерий (А), использующий меру потери точности S_N , гарантирует, что статистический разброс результатов не окажется больше ста процентов; более удобный критерий (Б) был ранее установлен эмпирически в работе [4]. На довольно большом количестве численных примеров нами было проверено, что, несмотря на нестрогость оценок, оба критерия обычно выделяют одинаковые (или отличные на единицу) значения N , которые как раз и совпадают с оптимальными (подобранными из условия наилучшего соответствия модельной функции-оригиналу). Столь эффективное действие критериев основано на резкой зависимости сингулярных чисел от их порядкового номера (рис. 4).

Как было отмечено выше, свойства ядра в дальней зоне налагают специфические ограничения на возможность реконструкции. Выяснить суть этих ограничений несложно на основе дискретного подхода. Рассуждения проведем для комплексных нагрузок; в варианте с априорно вещественными функциями $q(x)$ все последующие соотношения сохраняются с заменой числа мод M на соответствующее число вещественных параметров $2M$. В приближении дальней зоны, т.е. в задаче с вырожденным ядром (3б) допустимые значения регуляризующего параметра N ограничены сверху размерностью пространства векторов \mathbf{u} , равной количеству однородных мод M (при $N > M$ старшие сингулярные числа матрицы B получатся нулевыми, и решение будет неустойчиво). Пусть $N[q]$ – характерное наименьшее число членов Фурье-разложения (4), дающее приемлемое приближение заданной функции $q(x)$ по норме $C[X_1, X_2]$. Тогда для успешной реконструкции должно выполняться условие

$$N[q] \leq M. \quad (7)$$

В пределе при $\Delta \rightarrow 0$ необходимое условие реконструкции (7) становится, в определенном смысле, также и достаточным. Действительно, в классе функций $q(x)$, представимых конечным рядом Фурье вида (4) с $N \leq M$, решение обратной задачи с ядром (3б) единственно и устойчиво к возмущениям исходных данных \mathbf{u} . Для нагрузок же общего вида, при условии (7), вклады в вектор \mathbf{u} от старших (с номерами $n > M$) членов ряда Фурье носят характер малого возмущения, что обеспечивает восстановление младших членов ряда по методу [4, 5]. Итак, условие (7) служит искомым оценочным критерием, определяющим (при не слишком больших погрешностях Δ) возможность



Рис. 4. Сингулярные числа в примерах с нагрузками типа I и II (кривые I и II соответственно). Различие графиков связано с разными зонами приложения нагрузок. $k = 6$; $N = 12$. Для $N < 12$ результаты мало отличаются от показанных на рисунке, так как младшие сингулярные числа слабо зависят от размерности N .

адекватной реконструкции. Согласно (7), уменьшение числа однородных мод M ведет не столько к общему ухудшению качества восстановленных изображений, сколько к сужению допустимого множества функций $q(x)$; именно это и наблюдалось в численных экспериментах.

Ввиду того, что значение $N[q]$ понимается лишь как оценка по порядку величины, его можно трактовать как собственную характеристику функции $q(x)$, слабо зависящую от выбора базисных функций в (4). Поэтому неудивительно, что критерий (7) оправдывается эмпирически не только в дискретном подходе, но и в расчетах по методу Тихонова, в которых базис не фиксирован. Интерпретируя условие (7), уместно также подчеркнуть, что в приближении дальней зоны предел $\Delta \rightarrow 0$ физически соответствует малой, но конечной погрешности измерений, превосходящей вклады от неоднородных мод.

Таким образом, в настоящей работе, в рамках общей задачи восстановления поля [4, 5], исследована модель с реконструкцией динамических контактных напряжений, действующих на упругий слой. Реконструкцию удается проводить как методом дискретных разложений [4, 5], так и на основе интегрального операторного уравнения, регуляризованного методом Тихонова. Эффективность двух подходов оказалась примерно одинаковой, и это придает уверенность в том, что она близка к принципиально достижимой.

Некоторым недостатком дискретного подхода является слабая устойчивость результатов к по-

рядку N редуцированной системы уравнений. Как было показано, эта трудность все же преодолима. В ходе обсуждения данного вопроса пояснено математическое происхождение эмпирической оценки [4] для оптимальных значений N , указана альтернативная оценка и подтверждена применимость обеих оценок на практике.

Восстановление контактной нагрузки оказывается возможным даже в том случае, когда измерения производятся в дальней зоне, и экспериментальная информация предельно бедна из-за малого числа мод, существующих в этой области. Вырожденность ядра интегрального уравнения Фредгольма налагает при этом естественные ограничения на реконструкцию поля напряжений, конфигурация которого должна быть а priori достаточно простой. Для таких полей, удовлетворяющих условию (7), прогнозируется, при не слишком больших измерительных погрешностях, устойчивая реконструкция с передачей пространственных деталей волновой картины.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 00-01-00545, № 00-15-96087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин А.В., Прейсс А.К. Определение трехмерного напряженного состояния элемента конструкции по данным измерений на части его поверхности // *Машиноведение*. 1982. № 1. С. 79–85.
2. Фомин А.В. Определение напряженного состояния в объеме детали по известным перемещениям или напряжениям на части ее поверхности // *Машиноведение*. 1982. № 4. С. 67–73.
3. Прейсс А.К. Определение полей напряжений по ограниченной экспериментальной информации // *Машиноведение*. 1984. № 2. С. 77–83.
4. Бобровницкий Ю.И. Задача восстановления поля в структурной интенсиметрии: постановка, свойства, численные аспекты // *Акуст. журн.* 1994. Т. 40. № 3. С. 367–376.
5. Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П., Кочкин А.А., Томилина Т.М. Постановка и решение задачи восстановления волнового поля в упругой конструкции // *ДАН. Механика*. 1998. Т. 359. № 2. С. 190–193.
6. Karlsson S.E.S. Identification of external structural loads from measured harmonic responses // *J. Sound and Vibr.* 1996. V. 196. № 1. P. 59–74.
7. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Восстановление поля в анизотропной упругой среде // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 4. С. 451–455.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
9. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
10. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
11. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1998. 360 с.
12. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
13. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
14. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Reconstruction of the Dynamic Contact Stresses in an Elastic Layer from the Displacements of Its Free Surface

A. O. Vatul'yan, V. M. Dragilev, and L. L. Dragileva

An inverse problem on the reconstruction of the wave field of contact stresses produced by an external load in an elastic layer from the displacements of its free surface is considered for the model of forced steady-state vibrations in the approximation of plane deformations. The solution is constructed using two approaches: (1) a reduction of the problem to the Fredholm integral equation of the first kind with the use of the Tikhonov regularization and (2) an expansion of the solution in a discrete set of waves. It is shown that both approaches are approximately equivalent in the model under consideration. Possibilities for an adequate reconstruction of the source field from far-zone measurements of a finite number of propagating wave modes are analyzed.