

УДК 534.231.1+537.876.23

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ РАССЕЯННОГО В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПОЛЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

© 2001 г. О. Э. Гулин\*, И. О. Ярошук\*\*

\*Harbin Engineering University, Harbin, 150001 P.R. China

\*\*Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН  
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43

E-mail: yaroshchuk@mailcity.com

Поступила в редакцию 21.12.2000 г.

В рамках волнового подхода в пространственно-временной области рассмотрена статистическая задача о рассеянии широкополосных импульсов, нормально падающих на случайно-слоистую среду. Представлены результаты моделирования корреляционных функций и спектральных плотностей мощности поля, рассеянного в обратном направлении. Они дополняют статистическую картину формирования рассеянного поля, подтверждают и уточняют ряд выводов, сделанных ранее на основе изучения поведения статистических моментов поля. Моделирование свободно от приближений, обычно используемых при статистическом анализе задач распространения, и позволяет исследовать статистику рассеянного поля в широкой области временных интервалов, определить границы применимости приближенных методов.

В работах [1–3] на основе классического волнового подхода в пространственно-временной области рассматривалась проблема рассеяния временных импульсов и сигналов, нормально падающих на слоистую случайно-неоднородную среду. Изучалось поведение во времени статистических моментов рассеянного в обратном направлении поля для флуктуаций скорости звука в виде марковского процесса. Проведенное стохастическое моделирование основывалось на точной вычислительной схеме, построенной на базе аналитико-численного метода, развитого ранее для решения детерминированных задач [4]. Необходимо отметить, что несмотря на довольно большое число работ по распространению импульсов в неоднородных средах данной проблеме в статистической волновой постановке посвящено не так много статей. Укажем на работы [5–7], которые в плане исходной постановки задачи и преследуемым целям наиболее близки к нашей. В этих статьях получены некоторые аналитические результаты по рассеянию гладких импульсов: асимптотические законы спада средней интенсивности, эволюция формы исходного импульса во времени, закон распределения вероятности для обратно рассеянного поля и т.д.. Однако работы [5, 6] имеют в основном математический характер и их рассмотрение сопровождается большим числом накладываемых друг на друга предположений, затрудняющих понимание смысла конечных результатов и областей применимости представленных выводов. Данные обстоятельство главным образом связаны с попыт-

ками перенести во временную область результаты приближенного анализа процессов рассеяния в частотной области посредством традиционного преобразования Фурье. Несомненный интерес представляет статья [7], в которой, в частности, приведены основные приближенные результаты работ [5, 6] как следствие асимптотического анализа и физически ясного и элегантного подхода – аналитического продолжения решения стационарной задачи по параметру поглощения. Наш подход к проблеме связан с точным моделированием и снимает ограничения как на характеристики падающих импульсов, так и на статистику флуктуирующей среды. Главное, однако, в том, что он позволяет провести рассмотрение в любых интересующих временных областях и, в частности, проследить изменение статистических характеристик рассеянного в обратном направлении поля в области неустановившихся процессов, тогда как перечисленные выше работы дают понятие главным образом о процессах в далеких по времени областях, где справедливы результаты асимптотических вычислений. В настоящей работе представлены результаты моделирования корреляционных функций и спектральных плотностей обратно рассеянного поля для двух важных случаев широкополосных импульсов, падающих на случайную среду: это тета-импульс (постоянный импульс бесконечной длительности) и дельта-импульс (импульс бесконечно малой длительности). Для временных импульсов такого типа применимость методов при-

ближенного анализа, развитых в работах [5–7], вызывает сомнение.

Рассмотрим, как и ранее [1–3], краевую задачу о нормальном падении импульса  $\varphi(|z-L| + c_2 t)$  на случайную слоистую среду, занимающую часть однородного пространства  $L_0 < z < L$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(z, t) = 0, \quad (1)$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(z, t) \right|_{z=L} = \frac{2}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t), \quad (2a)$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(z, t) \right|_{z=L_0} = 0. \quad (2б)$$

Мы предполагаем, что импульс приходит из однородного правого полупространства, где  $c(z) = c_2$ , к границе  $z = L$  в момент времени  $t = +0$ . При  $t > 0$  в этом полупространстве возникает рассеянное флуктуирующей средой поле  $r(|z-L| - c_2 t)$ , так что  $r(t) = U(L, t) - \varphi(t)$ . Зависимость от времени статистических характеристик этого поля является предметом нашего исследования.

В работах [1, 2] анализировалось поведение статистических моментов обратно рассеянного поля для падающих на среду импульсов различной длительности. Было показано, что рассеяние носит нестационарный характер и представлены результаты по его количественному описанию. В настоящей работе мы приводим результаты исследования корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайного поля  $r(t)$ , дополняющие и уточняющие сделанные ранее выводы по картине рассеяния.

Будем считать флуктуации профиля скорости звука гауссовым случайным процессом  $c(z) = c_0(1 + \varepsilon(z))$  с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \varepsilon(z)\varepsilon(z') \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \exp(-|z-z'|/l)$ , где интенсивность флуктуаций ( $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$ , а радиус корреляции  $l$  – самый малый пространственный масштаб в задаче. Опираясь на предшествующий анализ [1–3], введем в рассмотрение параметры привязки к некоторому опорному узкополосному сигналу несущей частоты  $\Omega$ :  $D(\Omega)$  – коэффициент диффузии для этой частоты [7],  $T = D^{-1}/c_0$  – соответствующий временной масштаб диффузии. Если  $c(z)$  является детерминированной функцией, то решение задачи (1)–(2) при  $z = L$ , то есть поле  $r(t)$ , может быть выписано в аналитической форме при кусочной аппроксимации на сетке профиля  $c(z)$  определенным видом функций с любой заданной степенью точности. Данное выражение приводилось в работах [1–3] и использовалось при расчетах поля

для каждой реализации случайной функции  $\varepsilon(z)$ , задаваемой своим ансамблем. Обратимся к результатам моделирования. Далее, как и ранее [2, 3], в рассмотрении будут фигурировать только нормированные временные переменные:  $\Omega^* = \Omega T$ ,  $\tau = t/T$ ,  $\xi(z) = T^{-1} \int_{L_0}^z d\zeta c^{-1}(\zeta)$ ,  $h = \xi(L)$ ,  $R(\tau) = r(t)/T$ .

При вычислениях выбирались следующие значения параметров:  $\Omega^* = 100$ ,  $h = 20$  и  $40$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.025$ . Отметим, что выбранная частота опорной гармоники соответствует большому количеству осцилляций на масштабе коэффициента диффузии. Это также соответствует малым флуктуациям неоднородностей. Величина  $h$  определяет толщину неоднородного слоя, она равно среднему времени прохождения волной слоя [2]. Выбранные значения  $h$  (должно быть  $h \gg 1$ , см., например, [7]), соответствуют случаю, когда монохроматическая волна частоты  $\Omega$  с вероятностью близкой к единице полностью отражается слоем флуктуирующей среды.

Были рассмотрены два предельных случая импульсов, падающих на среду: импульс очень большой длительности  $\eta$  (время воздействия сигнала на границу слоя), каким является единичная ступенчатая функция Хевисайда  $\theta(\tau)$ , и очень короткий по длительности импульс (модель дельта-импульса). С точки зрения параметров задачи, термин “короткий импульс” означает, что его длительность  $\eta \ll 1 < h$  и, вообще говоря,  $\eta$  может быть сравнима и даже меньше времени, за которое передний фронт импульса проходит дистанцию, равную радиусу корреляции неоднородностей среды. Очень большой по длительности импульс означает, что наоборот  $\eta > 2h$ . Данные случаи принципиально отличаются от ситуаций, для которых ранее приближенными методами делались попытки получить асимптотические результаты [5–7]. В этих работах предполагались узкополосность и гладкость формы падающих импульсов. Важно заметить, что функция, описывающая распространение скачка ( $\varphi(t) = \theta(t)$ ), является функцией Грина задачи (1)–(2). Поэтому на ее основе можно легко рассматривать задачи с любыми другими  $\varphi(t)$ . Ранее в работах [2, 3, 8] было показано, что процесс обратного рассеяния имеет существенно нестационарный характер, и эта область нестационарности занимает значительный временной интервал. Так, для дельта-импульса данная область переходных процессов лежит в пределах временного интервала  $0 < \tau < 20$ , в течение которого подавляющая часть энергии исходного импульса излучается обратно из среды. В случае же функции Грина область выраженной нестационарности расширяется до  $\tau \sim 35$ – $40$ . В общем случае нестационарного процесса, как известно, корреляционная функция и спектральная плотность мощно-

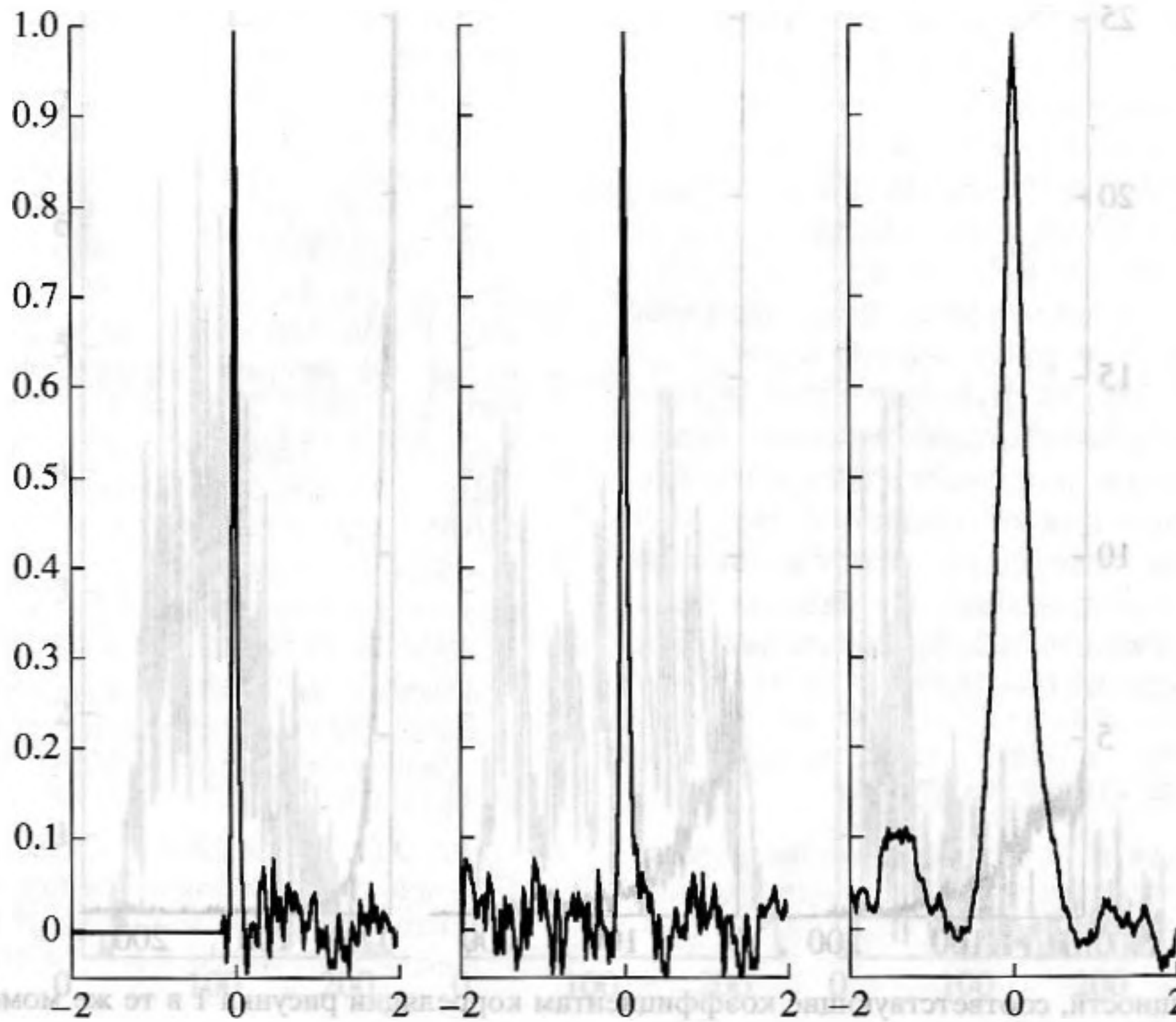


Рис. 1. Коэффициент корреляции обратно рассеянного поля для падающего на среду  $\theta$ -импульса в следующие моменты времени наблюдения: (слева направо):  $\tau = 0.2$ ,  $\tau = 2$  и  $\tau = 35$ .

сти обратно рассеянного поля могут быть записаны соответственно в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, \delta) &= \langle R(\tau)R(\tau + \delta) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \langle \hat{R}(\omega_1)\hat{R}^*(\omega_2) \rangle \exp\{i\omega_1\tau - i\omega_2(\tau + \delta)\}, \\ S_{\omega}(\tau) &= (2\pi)^{-1} \int d\delta \Psi(\tau, \delta) e^{-i\omega\delta} = \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \langle \hat{R}(\omega_1)\hat{R}^*(\omega) \rangle \exp\{i\omega_1\tau\}. \end{aligned}$$

Спектральную плотность мощности мы рассматриваем как изменяющуюся во времени функцию, характеризующуюся своими мгновенными значениями. При этом эволюция  $S_{\omega}(\tau)$  показывает частотное содержание обратно рассеянного поля в тот или другой момент времени.

Усреднение в процессе моделирования проводилось по ансамблю из  $N = 1000$  случайных реализаций поля, вполне достаточному для получения надежных статистических результатов в рассматриваемой задаче. При этом качественная сторона зависимости моментов поля  $R(\tau)$  уже хорошо проявляется и при значительно меньшем числе усредняемых реализаций. На рис. 1 представлено поведение во времени коэффициента корреляции обратно рассеянного поля для интервала  $\delta \in [-2, 2]$  в

случае падающего  $\theta$ -импульса. Видно, что в области нестационарности помимо уменьшения амплитуды корреляционной функции  $\Psi(\tau, 0) = \langle R^2(\tau) \rangle$  [3], происходит изменение масштаба корреляции обратно рассеянного поля (относительная ширина коэффициента корреляции растет и постепенно исчезают его мелкоструктурные флуктуации). Увеличение корреляции означает сужение спектральной плотности мощности процесса. Действительно, с ростом времени наблюдения  $\tau$  высокочастотные компоненты спектра мощности в обратно рассеянном поле исчезают, и спектр все более переходит в низкочастотную область, как это видно из рис. 2. Одновременно его амплитуда в окрестности  $\omega^* \sim 0$  увеличивается. Это подтверждает качественные рассуждения, ранее высказанные в работе [3]. Эти низкие частоты формируют бесконечный хвост  $\theta$ -импульса и проникают без рассеяния в среду на большую глубину. Именно этими компонентами обусловлен степенной характер убывания второго момента обратно рассеянного поля, установленный в работах [5–7] для асимптотического предела в случае падающих на среду узкополосных импульсов и видеоимпульсов. Степенной характер убывания поля в области переходных процессов исследован также в [8], где для  $\theta$ -импульса мы получили закон  $\sim \tau^{-0.5}$ ,  $\tau \in (20, 40)$ . Таким образом, рисунки 1–2 показывают, что стационаризации процесса рассеяния для случая функции Грина в рассматриваемой

шляхеного анализа, выдвигает сомнения.

Рассмотрим, как в работе [3], краевую задачу о нормальном падении импульса  $\psi(z=L, t) = \psi_0 \delta(t)$  на случайную слоистую среду, занимающую часть однородного пространства  $L_1 < z < L_2$ .

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(z, t) = 0, & (1) \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(z, t) = \frac{2}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 \delta(t), & (2a) \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(z, t) = 0, & (2b) \end{cases}$$

Мы предполагаем, что импульс приходит к однородного правого волупространства в момент времени  $t = 0$  на границе  $z = L$  в момент времени  $t = 0$ . При этом полупространство  $L_1 < z < L_2$  заполнено флуктуирующей средой.

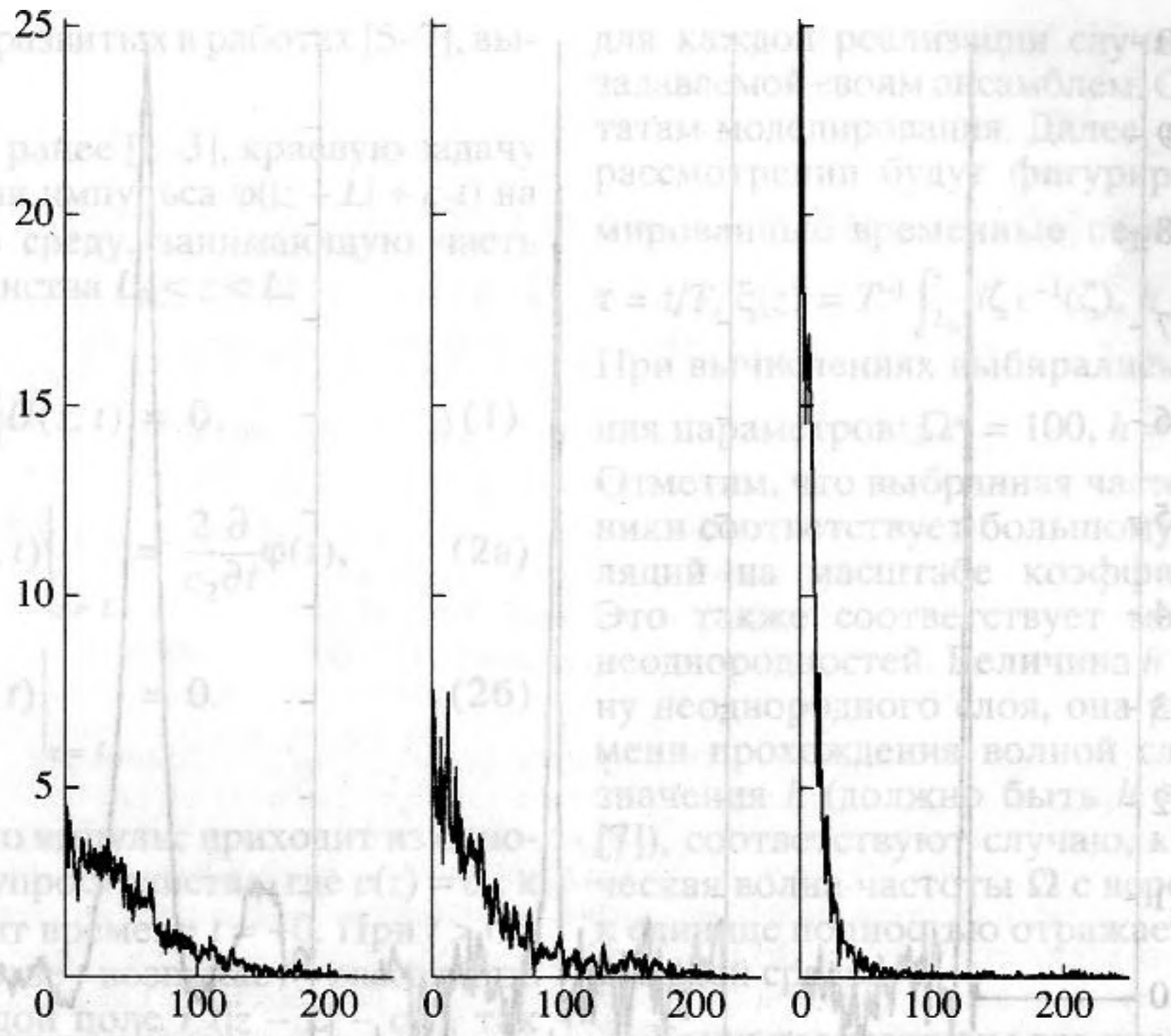


Рис. 2. Спектры мощности, соответствующие коэффициентам корреляции рисунка 1 в те же моменты времени наблюдения.

В работах [1, 2] анализировалось поведение статистических моментов в обратном рассеянии на длинных временах. Мы же рассматриваем поведение корреляционных функций в обратном рассеянии на коротких временах. В работе [3] было показано, что в обратном рассеянии на коротких временах корреляционная функция  $\langle R^2(\tau) \rangle$  убывает по закону  $\tau^{-0.5}$ . В работе [4] было показано, что в обратном рассеянии на коротких временах корреляционная функция  $\langle R^2(\tau) \rangle$  убывает по закону  $\tau^{-0.5}$ .

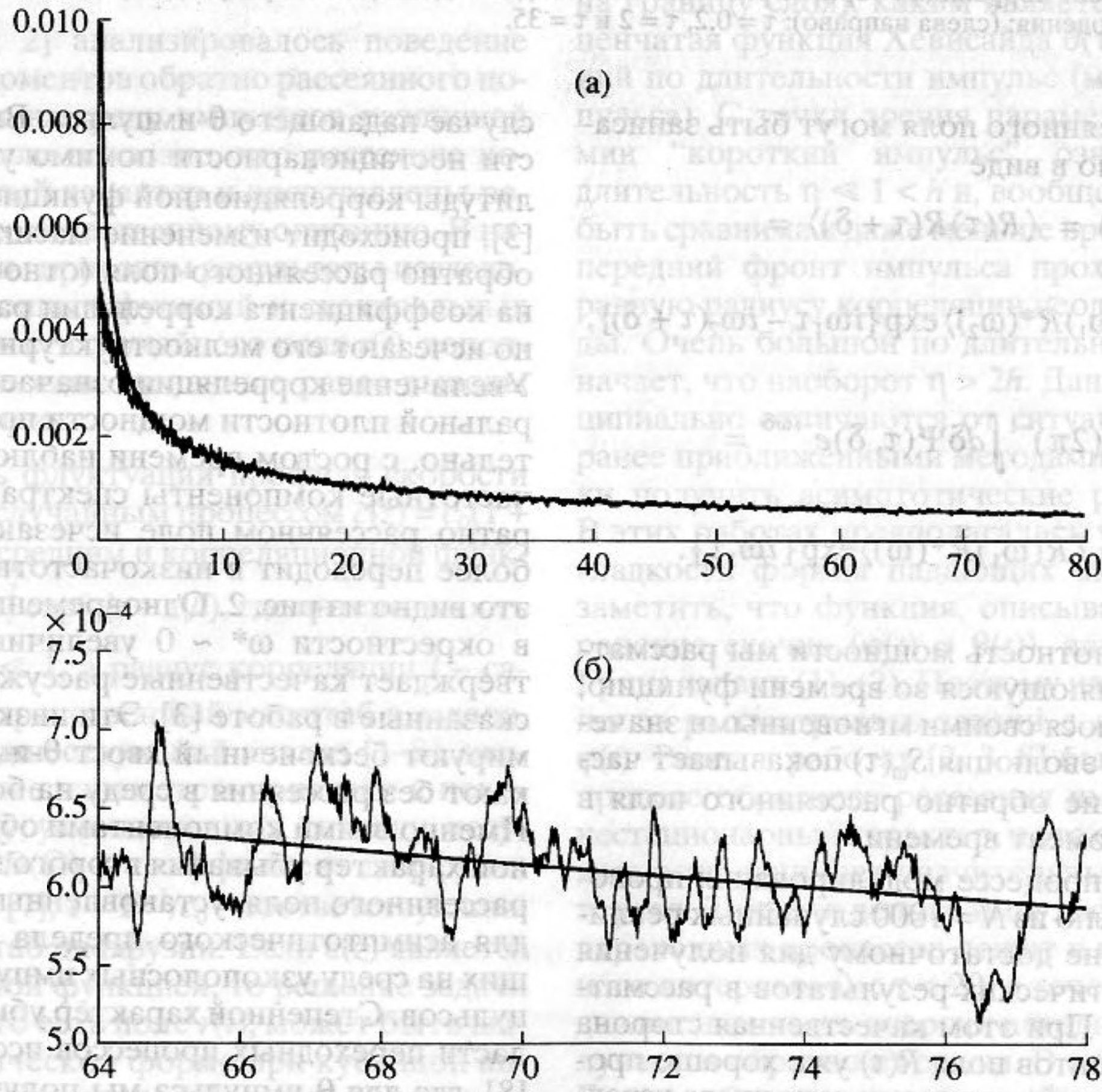


Рис. 3. а – график функции  $\langle R^2(\tau) \rangle$  для случая очень толстого слоя случайной среды; б – часть графика функции  $\langle R^2(\tau) \rangle$  для больших времен наблюдения в увеличенном масштабе и аппроксимирующая его по методу наименьших квадратов монотонная кривая с зависимостью  $\sim \tau^{-0.5}$ .

для каждой реализации случайной среды  $\psi(z, t)$  та же самая процедура. Обратная процедура выполняется методом Монте-Карло. Далее, как в работе [3], в рассуждениях будем фиксировать  $t = 0$  и будем фиксировать время  $t = 0$ . При вычислениях выбирались следующие значения параметров:  $\Omega = 100$ ,  $h = 0.0$  и  $40$ ,  $\sigma^2 = 0.25$ . Отметим, что выбранная частота опорной гармоники соответствует большому количеству осциллирующей на масштабе коэффициента диффузии. Это также соответствует малым флуктуациям неоднородностей. Величина  $h$  определяет толщину неоднородного слоя, она равно среднему времени прохождения волной слоем [2]. Выбранные значения  $h$  должны быть  $h \ll 1$ , см., например, [7]), соотносятся с случаем, когда монохроматическая волна частоты  $\Omega$  с вероятностью близкой к единице отражается слоем флуктуирующей среды.

(а) по длительности импульса (модель дельта-импульса). В работе [3] было показано, что в обратном рассеянии на коротких временах корреляционная функция  $\langle R^2(\tau) \rangle$  убывает по закону  $\tau^{-0.5}$ . В работе [4] было показано, что в обратном рассеянии на коротких временах корреляционная функция  $\langle R^2(\tau) \rangle$  убывает по закону  $\tau^{-0.5}$ .

(б) часть графика функции  $\langle R^2(\tau) \rangle$  для больших времен наблюдения в увеличенном масштабе и аппроксимирующая его по методу наименьших квадратов монотонная кривая с зависимостью  $\sim \tau^{-0.5}$ .

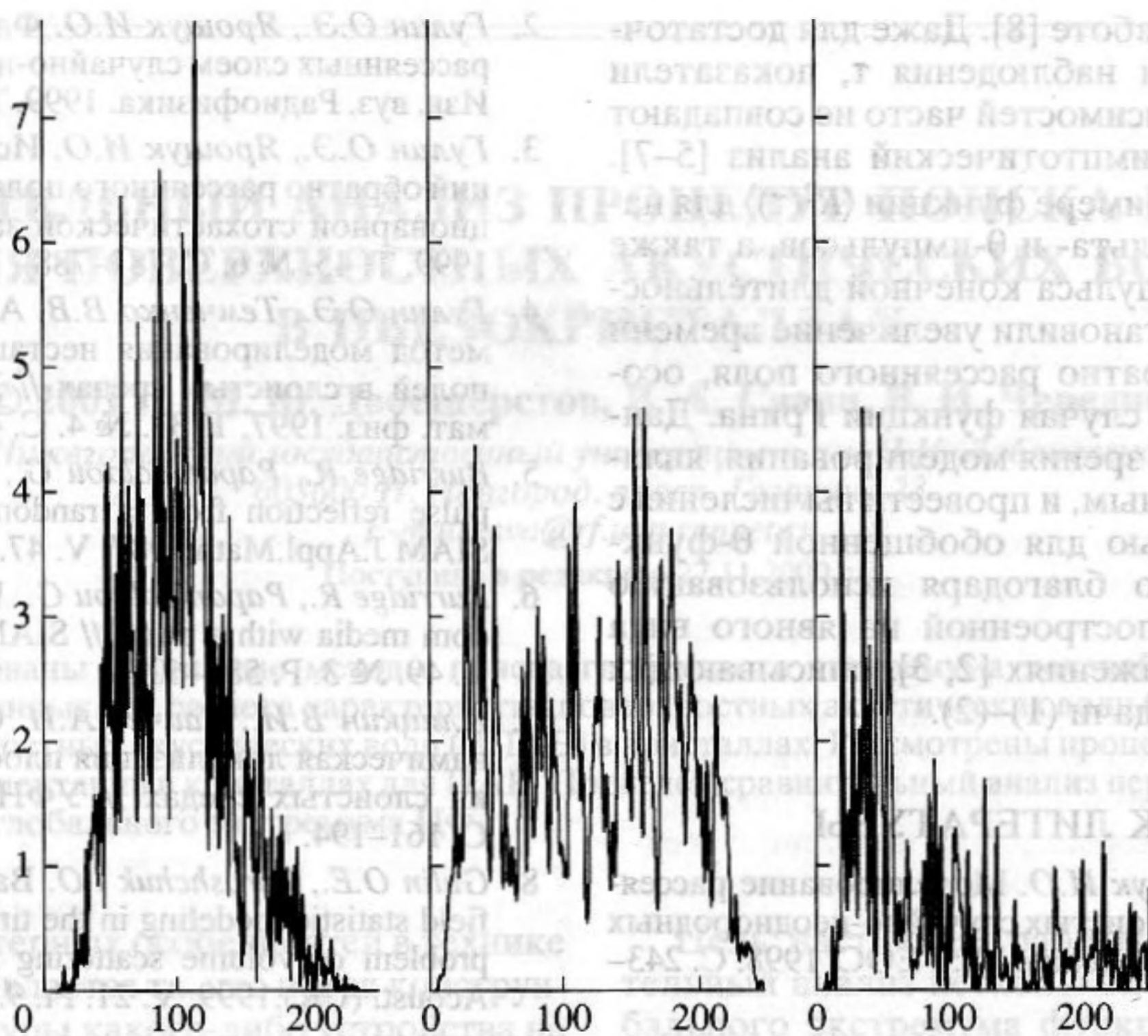


Рис. 4. Спектры мощности обратно рассеянного поля для падающего на среду  $\delta$ -импульса в следующие моменты времени наблюдения: (слева направо):  $\tau = 0.2$ ,  $\tau = 10$  и  $\tau = 35$ .

задаче не происходит, можно говорить лишь об установлении некоторого квазистационарного режима для времен  $\tau \sim 30-40$ , соответствующих выходу  $\Psi(\tau, 0) = \langle R^2(\tau) \rangle$  на уровень  $\approx 0.8 \times 10^{-3}$  [3] и дальнейшему медленному спаданию  $\sim \tau^{-0.5}$ . В последней работе предполагалось, что, начиная с этих времен, имеет смысл говорить о стационарном режиме для обратно рассеянного поля. Однако из предыдущего анализа следует, что данное предположение не совсем правомерно. С хорошей точностью оно справедливо только для среднего значения  $\langle R(\tau) \rangle$ . На рисунках 3а, 3б в качестве иллюстрации вышесказанного представлены графики функции  $\langle R^2(\tau) \rangle$  для очень больших времен наблюдения, вплоть до  $\tau \sim 80$  (им соответствуют размеры слоя  $(L - L_0) \sim 4000l$ ), и аппроксимирующая по методу наименьших квадратов монотонная кривая с зависимостью  $\sim \tau^{-0.5}$ .

Обратимся теперь к модели падающего дельта-импульса. Соответствующие корреляционные функции приведены на рис. 4. Однако имеют гораздо меньшую относительную ширину, то есть корреляция в обратно рассеянном поле здесь значительно короче по времени и имеет лишь слабо выраженную тенденцию к увеличению с ростом  $\tau$ . Развертка соответствующего спектра мощности процесса показана на рис. 4. Отличительной особенностью его является спадание с течением времени уровня спектра в области высоких частот. В данном случае для области низких частот  $\omega^* \sim 0$

имеются очень малые значения амплитуды спектра, что указывает на малую долю энергии, содержащуюся в обратно рассеянных компонентах с такими частотами. Поскольку для исходного дельта-импульса спектр распределен по частотам равномерно, энергетика обратно рассеянного поля в большей степени, чем в случае  $\theta$ -импульса, формируется высокими частотами, которые рассеиваются средой. Наблюдается та же закономерность, что и в случае  $\theta$ -импульса: высокочастотные гармоники интенсивно излучаются обратно из среды, унося к моменту времени наблюдения  $\tau \sim 20$  практически всю энергию дельта-импульса.

В заключение еще раз отметим, что представленные результаты статистического моделирования описывают временную область выраженных нестационарных переходных процессов обратного рассеяния, для которой неприменимы результаты приближенного анализа работ [5-7], дающие асимптотическое поведение второго статистического момента поля  $R(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Кроме того, выше подчеркивалось, что эти результаты могут оказаться мало пригодными и для анализа такого рода падающих импульсов, какими являются широкополосные дельта- и  $\theta$ -импульсы, поскольку получены в приближении гладкости и ограниченности частотной полосы падающих на случайную среду импульсов. Об этом свидетельствуют упомянутые выше степенные зависимости от времени для моментов обратно рассеянного

поля, изученные в работе [8]. Даже для достаточно больших времен наблюдения  $\tau$ , показатели степени данных зависимостей часто не совпадают с теми, что дает асимптотический анализ [5–7]. Мы видели это на примере функции  $\langle R^2(\tau) \rangle$  для падающих на среду дельта- и  $\theta$ -импульсов, а также прямоугольного импульса конечной длительности [8]. Мы также установили увеличение времени корреляции для обратно рассеянного поля, особенно заметное для случая функции Грина. Данный случай, с точки зрения моделирования, является наиболее сложным, и провести вычисления с требуемой точностью для обобщенной  $\theta$ -функции удается только благодаря использованию численной схемы, построенной на явного вида аналитических выражениях [2, 3], описывающих решение краевой задачи (1)–(2).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулин О.Э., Ярощук И.О. Моделирование рассеяния импульсов в слоистых случайно-неоднородных средах // Акустика океана. М.: ГЕОС, 1998. С. 243–246.
2. Гулин О.Э., Ярощук И.О. Флуктуации импульсов, рассеянных слоем случайно-неоднородной среды // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 4. С. 383–393.
3. Гулин О.Э., Ярощук И.О. Исследование флуктуаций обратно рассеянного поля в одномерной нестационарной стохастической задаче // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 6. С. 781–788.
4. Гулин О.Э., Темченко В.В. Аналитико-численный метод моделирования нестационарных волновых полей в слоистых средах // Журн. выч. матем. и мат. физ. 1997. Т. 37. № 4. С. 499–504.
5. Burrige R., Papanicolaou G., White B. Statistics for pulse reflection from a randomly layered medium // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 1. P. 146–168.
6. Burrige R., Papanicolaou G., White B. Probing a random media with a pulse // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. № 3. P. 582–607.
7. Кляцкин В.И., Саучев А.И. Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически слоистых средах // УФН. 1992. Т. 162. № 3. С. 161–194.
8. Gulin O.E., Yaroshchuk I.O. Backward scattered pulse field statistic modeling in the time domain in stochastic problem of volume scattering // Proceedings Inst. of Acoust. (UK). 1999. V. 21. Pt. 9. P. 111–117.

## Correlation Properties of the Backscattered Field in a Nonstationary Statistical Problem

O. E. Gulin and I. O. Yaroshchuk

The statistical problem of the scattering of wideband pulses by a random layered medium at normal incidence is considered in the framework of the wave approach in the space–time domain. Simulated correlation functions and power spectral densities of the backscattered field are presented. They extend the earlier findings concerning the backscattered field formation, confirm and refine a number of conclusions drawn earlier from the behavior of the field's statistical moments. The simulation technique is free from approximations commonly used in the statistical analysis of the propagation problems and can be used to study the statistical properties of the scattered field in a wide range of time intervals and to find the limits of applicability of the approximate methods.