

УДК 534.13

## АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ЧАСТИЧНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

© 2001 г. Н. Ф. Ивина

Тихоокеанский военно-морской институт им. С.О.Макарова

690062 Владивосток, ул. Камская 6

E-mail: [helikot@mail.primorye.ru](mailto:helikot@mail.primorye.ru)

Поступила в редакцию 20.01.2000 г.

Методом конечных элементов выполнен анализ симметричных по толщине колебаний пьезопластин с частичными электродами. Исследованы спектры собственных частот на резонансе и антирезонансе, динамический коэффициент электромеханической связи и формы колебаний в большом диапазоне изменения геометрических размеров пластин и частичных электродов. Определены оптимальные геометрические размеры пластин и электродов, при которых достигается максимальная величина коэффициента связи. Рассмотрены особенности увеличения коэффициента связи пьезопластин из керамики различных составов за счет применения частичных электродов. Отмечено, что все составы пьезокерамики можно разделить на два типа: для пьезокерамики первого типа можно увеличить коэффициент связи толщинных колебаний при применении частичных электродов на 7–23% для разных мод. Для пьезокерамики второго типа коэффициент связи увеличить таким образом нельзя; иначе говоря, сплошные электроды являются оптимальными для толщинных колебаний пьезопластин, изготовленных из пьезокерамики второго типа.

Круглые пьезокерамические пластины соизмеримых размеров находят широкое применение в различной акустической аппаратуре. Собственные колебания конечных изотропных пластин детально исследованы в монографии [1]. Колебания круглых пьезокерамических пластин со сплошными электродами изучены экспериментально [2, 3], вариационным методом [4] и методом конечных элементов [5, 6, 7].

Из экспериментальных исследований известно, что форма электродов пьезопреобразователей влияет на их резонансные частоты и эффективность возбуждения различных мод. В статье [8] разработана приближенная математическая модель, пригодная для описания радиальных колебаний тонких дисков с осесимметричными частичными круговыми электродами. Показано, что с уменьшением размеров электродов частоты резонанса и антирезонанса первой радиальной моды повышаются. Из приведенных зависимостей также следует, что оптимальная (максимальная) величина динамического коэффициента электромеханической связи (ДКС), пропорциональная разности частот антирезонанса и резонанса [3], достигается для первой моды при неполном покрытии плоскостей диска электродами.

Наиболее универсальным методом анализа пьезопреобразователей соизмеримых размеров, в том числе, и с частичными электродами является метод конечных элементов [9–15]. В работах

[9, 10] разработаны конечно-элементные модели пьезоэлектрических кварцевых пластин, частично покрытых электродами, применяемых в электромеханических резонаторах с захватом энергии; рассмотрены сдвиговые и крутильные моды колебаний. В статьях [11, 12] методом конечных элементов рассчитаны неоднородные электрические и акустические поля в измерительных пьезопреобразователях в двумерном (плоском) приближении. Рассмотрены толстые пьезопреобразователи с нетрадиционно расположенными электродами.

Цель данной работы – анализ симметричных по толщине колебаний круглых пьезопластин с частичными электродами, исследование спектров собственных частот в режимах резонанса и антирезонанса, распределения смещений на излучающей поверхности (форм колебаний) и ДКС при изменении геометрических размеров пластин и частичных электродов. Конечной задачей является определение оптимальных геометрических размеров пьезопластин и электродов, при которых достигается максимальный ДКС, и исследование особенностей повышения ДКС толщинных колебаний пьезопластин, изготовленных из пьезокерамики различных составов.

Для достижения этой цели применен метод конечных элементов с учетом двух компонент смещения и электрического поля, что позволяет исследовать собственные колебания круглых

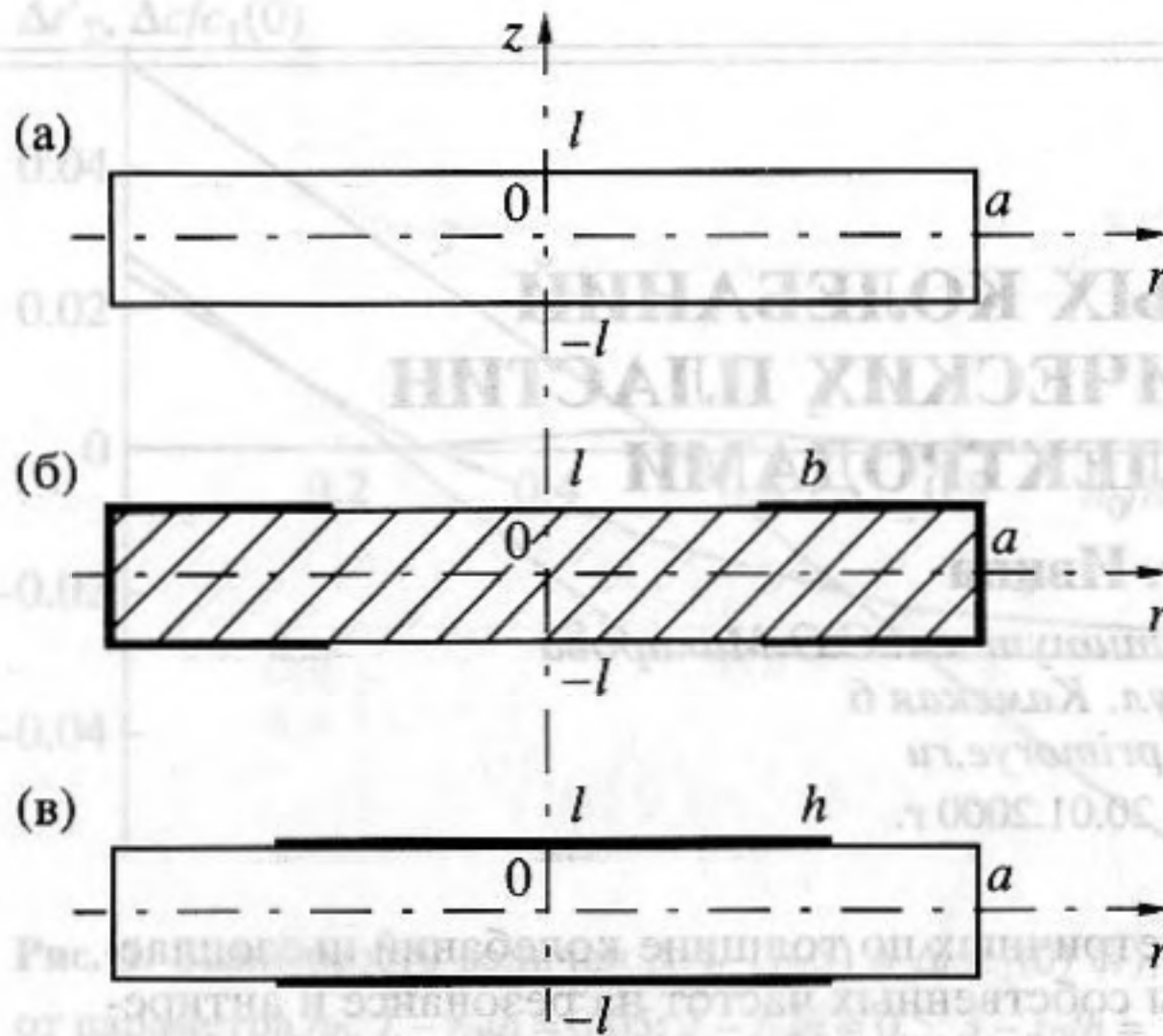


Рис. 1. Круглая конечная пьезопластина: а – со сплошными электродами; б – с кольцевыми электродами; в – с круговыми электродами.

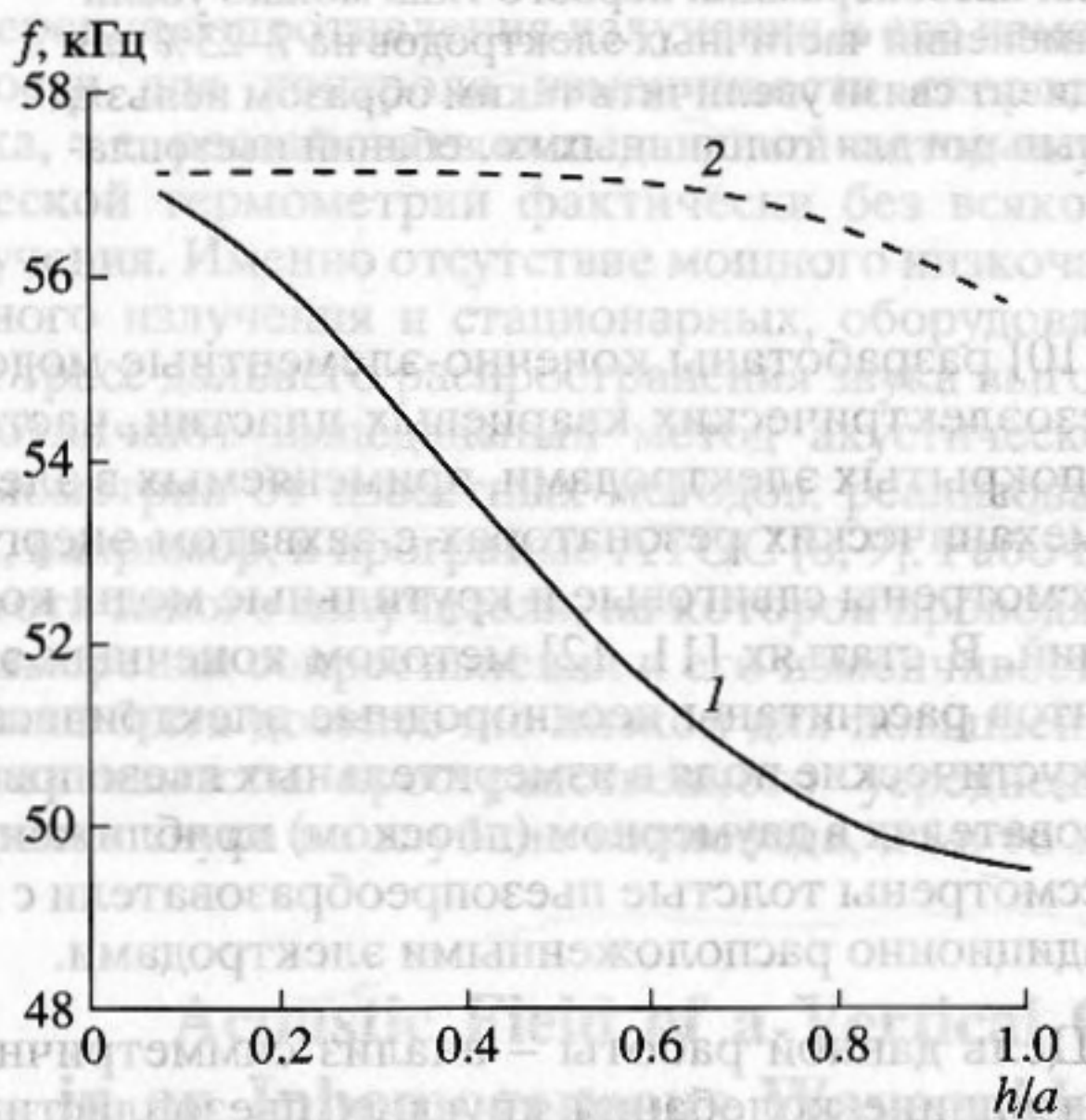


Рис. 2. Зависимости резонансной (1) и антирезонансной (2) частоты первой моды пьезопластины от радиуса круговых электродов, керамика ЦТБС-3.

пьезопластин при их частичном покрытии осесимметричными электродами [6, 7, 16].

Рассмотрим круглую пьезопластину радиуса  $a$  и толщиной  $2l$ ; в дальнейшем размер пластины определяется отношением  $l/a$ . На пьезопластине со сплошными электродами они нанесены полностью на плоскостях  $z = l, z = -l$  (рис. 1а). Исследуем два основных варианта расположения осесимметричных частичных электродов. Первый вариант – кольцевые периферийные электроды, при этом центральная часть пластины радиуса не покры-

та электродами. Размер кольцевых электродов определяется отношением  $b/a$ , случаю  $b/a = 0$  соответствуют сплошные электроды. Вторым вариантом – частичные круговые электроды радиуса  $h$ , их размер определяется отношением  $h/a$ , случаю  $h/a = 1$  соответствуют сплошные электроды.

Вся поверхность пьезопластины предполагается свободной от механических напряжений. На поверхностях, не покрытых электродами, обращается в нуль нормальная компонента электрической индукции; электроды представляют собой эквипотенциальные поверхности. В статьях [6, 16, 17] показано, что, с учетом указанных граничных условий, для анализа режима резонанса (короткого замыкания) и антирезонанса (холостого хода) получим обобщенные матричные задачи на собственные значения большой размерности

$$(H_{uu} - (k_r a)^2 c_{44} M) |u_i\rangle = 0, \quad (1)$$

$$(H_{uu} - H_{uv} H_{vv}^{-1} H_{vu} - (k_r a)^2 c_{44} M) |u_i\rangle = 0, \quad (2)$$

где  $M$  – глобальная безразмерная матрица массы,  $H_{uu}, H_{uv}, H_{vv}$  – глобальные безразмерные матрицы жесткости, пьезоэлектрической “жесткости” и диэлектрической “жесткости”, с учетом граничных условий, на электродах и конденсации (исключения электрических потенциалов узлов, расположенных вне электродов),  $c_{44}$  – элемент безразмерной матрицы упругих постоянных пьезокерамики,  $k_r$  – волновое число поперечной волны,  $|u_i\rangle$  – вектор безразмерных, нормированных на  $a$  узловых смещений [6, 16].

Из решения задач (1) и (2) находятся собственные значения – безразмерные резонансные и антирезонансные частотные параметры  $k_r a$  и собственные векторы – безразмерные узловые смещения  $|u_i\rangle$ . Зная собственные значения и собственные векторы задачи (1), можно вычислить ДКС ( $k$ ) для каждой моды колебаний как отношение взаимной энергии к среднему геометрическому значению упругой и электрической энергий [16, 17]

$$k^2 = \frac{k_1^2}{1 + k_1^2}, \quad k_1^2 = \frac{(\langle u_i | H_{uv} \rangle)^2 H_{vv}^{-1}}{(k_r a)^2 c_{44} \langle u_i | M | u_i \rangle}$$

При расчетах четвертая часть осевого сечения пьезопластины, лежащая в первом квадранте, при  $l/a \in [0.01; 0.5]$  разбивалась на 48 кольцевых прямоугольных конечных элементов второго порядка. При разных толщинах пьезопластины использовались три варианта аппроксимации: для толстых пластин –  $12 \times 4$  (12 конечных элементов по радиусу, 4 – по толщине), для тонких пластин –  $24 \times 2$  и промежуточный вариант –  $16 \times 3$ . Число равноотстоящих узлов на плоской поверхности соответственно равно 25, 49 и 33. Для выделения симметричных по толщине мод колебаний на плоскости симметрии пьезопластины  $z = 0$  вводи-

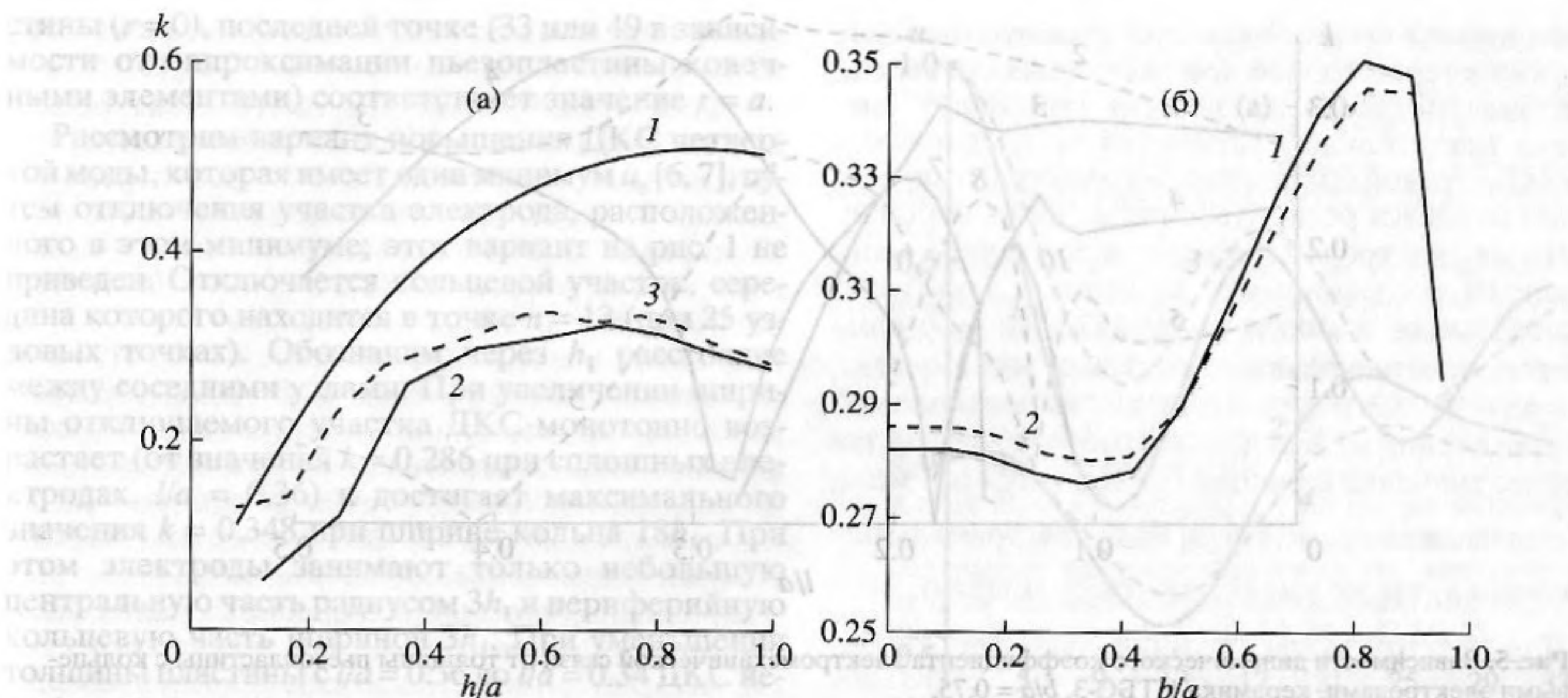


Рис. 3. Зависимости динамического коэффициента электромеханической связи пьезопластины от радиуса частичных электродов, керамика ЦТБС-3: а – 1 – первая радиальная мода,  $l/a = 0.02$ ; 2 – десятая мода,  $l/a = 0.15$ ; 3 – тринадцатая мода,  $l/a = 0.115$ ; б – четвертая мода: 1 –  $l/a = 0.34$ , 2 –  $l/a = 0.36$ .

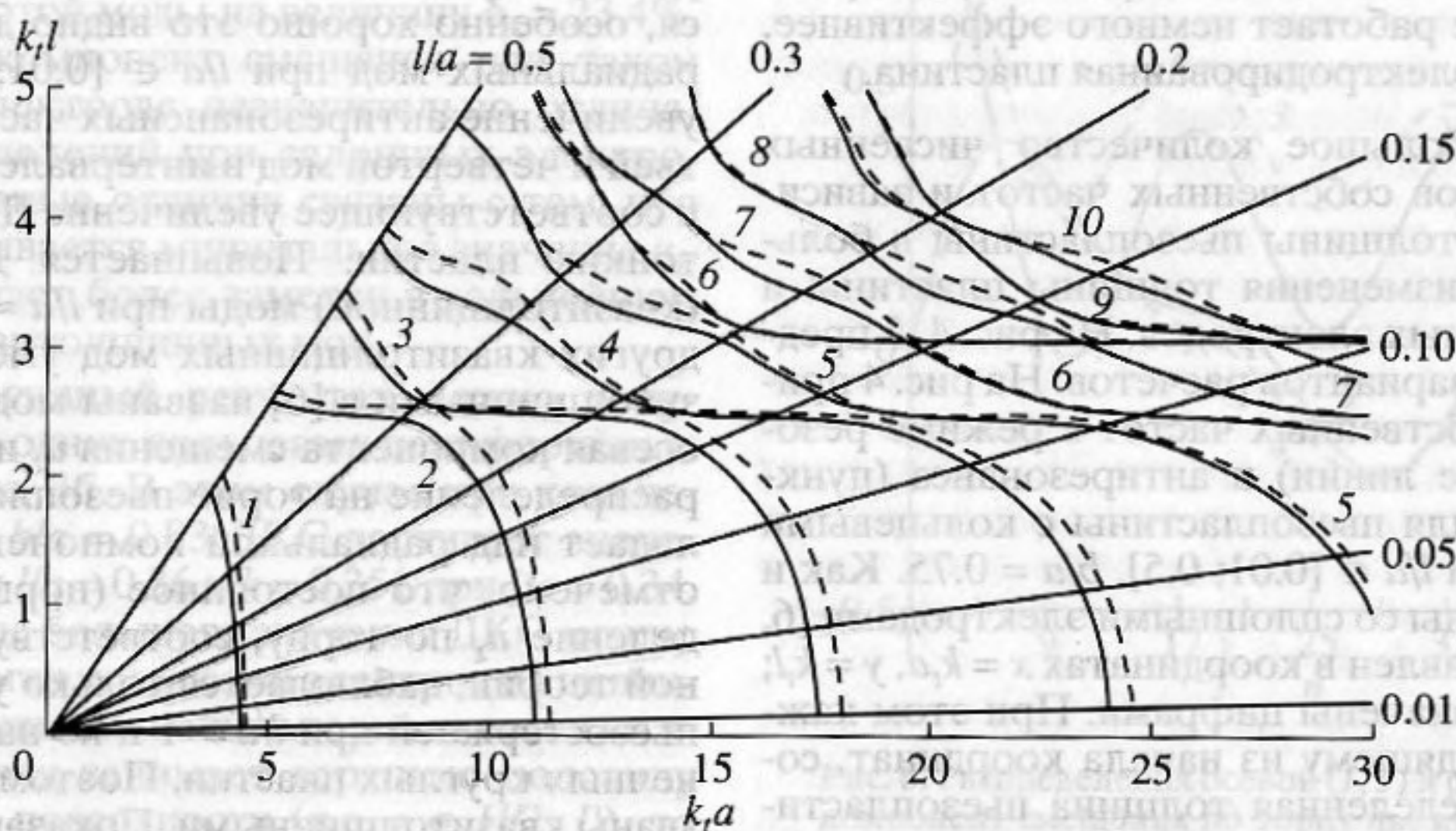


Рис. 4. Спектр собственных частот пьезопластины с кольцевыми электродами, керамика ЦТБС-3,  $b/a = 0.75$ .

лось граничное условие – равенство нулю осевых узловых компонент смещения.

Результаты численных расчетов для первой радиальной моды сравнены с приведенным в статье [8] аналитическим решением, имеющим экспериментальную проверку. На рис. 2 приведены зависимости резонансной и антирезонансной частоты первой моды радиальных колебаний от размеров круговых электродов. Радиус пьезопластины  $a = 25$  мм, толщина, которая не учитывается в приближенной аналитической модели,  $2l = 1$  мм, что соответствует безразмерному отношению  $l/a =$

$= 0.02$ ; пьезокерамика ЦТБС-3, параметры которой соответствуют справочным данным [18].

Качественно ход кривых аналогичен соответствующим кривым, полученным в статье [8] (для пьезокерамики Р1-60, все параметры которой в этой статье не приведены). Из рис. 2 следует, что максимальная разность частот антирезонанса и резонанса, которая пропорциональна ДКС, достигается не при полных электродах, а при  $h/a \approx 0.9$  (как и в статье [8]). Это также подтверждает правильность полученных численных результатов. На рис. 3а (кривая 1) приведена зависимость ДКС первой моды от размера круговых электродов. Оптимальное (максимальное) значение ДКС до-

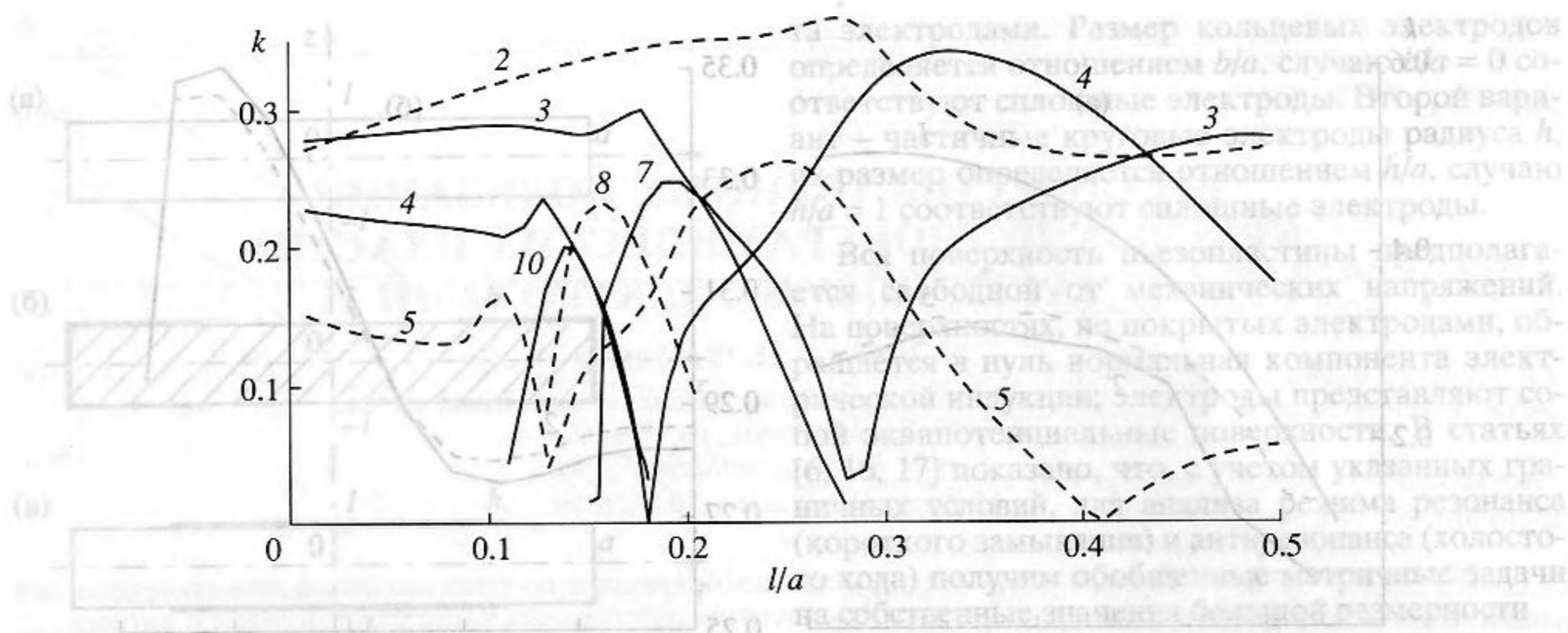


Рис. 5. Зависимости динамического коэффициента электромеханической связи от толщины пьезопластины с кольцевыми электродами, керамика ЦТБС-3,  $b/a = 0.75$ .

стигается при  $h/a \approx 0.9$ :  $k_{\max} = 0.51$ , при полных электродах  $k = 0.50$ . Таким образом, пластина с оптимальными частичными электродами на первой радиальной моде работает немного эффективнее, чем полностью электродированная пластина.

Выполнено большое количество численных расчетов спектров собственных частот и зависимостей ДКС от толщины пьезопластины в большом диапазоне изменения толщины пластины и радиусов частичных электродов. На рис. 4, 5 представлен один из вариантов расчетов. На рис. 4 приведен спектр собственных частот в режиме резонанса (сплошные линии) и антирезонанса (пунктирные линии) для пьезопластины с кольцевыми электродами при  $l/a \in [0.01; 0.5]$ ,  $b/a = 0.75$ . Как и для пьезопластины со сплошными электродами [6, 7] спектр представлен в координатах  $x = k_1 a$ ,  $y = k_1 l$ ; номера мод обозначены цифрами. При этом каждому лучу, выходящему из начала координат, соответствует определенная толщина пьезопластины  $l/a$ . Пьезоактивные участки, на которых разница частот антирезонанса и резонанса значительна и видна на рисунке (что соответствует большой величине ДКС), для компьютерных рисунков не заштрихованы в отличие от рисунков, ранее сделанных "вручную" в [6, 7]. На рис. 5 представлены зависимости ДКС от толщины пьезопластины для этого же варианта; номера мод обозначены цифрами. На рис. 5 отсутствуют шестая и девятая моды с малой величиной ДКС. Первая мода имеет большое значение ДКС, выходящее за пределы рис. 5, и поэтому она на нем не показана. При увеличении толщины пьезопластины ДКС первой моды почти линейно возрастает, например, в случае сплошных электродов от 0.504 до 0.581 при  $l/a \in [0.01; 0.5]$ .

Рассмотрим изменение спектров собственных частот и ДКС для пьезопластины с кольцевыми

электродами по сравнению с пластиной со сплошными электродами [6, 7]. При уменьшении размеров электродов собственные частоты повышаются, особенно хорошо это видно для пяти первых радиальных мод при  $l/a \in [0.01; 0.05]$ . Заметно увеличение антирезонансных частот второй, третьей и четвертой мод в интервале  $l/a \in [0.01; 0.15]$  и соответствующее увеличение ДКС этих мод для тонких пластин. Повышается ДКС четвертой (квазитолщинной) моды при  $l/a \approx 0.36$ ; ДКС двух других квазитолщинных мод уменьшается. Квазитолщинными в [6] названы моды, для которых осевая компонента смещения  $u_z$  имеет синфазное распределение на торце пьезопластины и преобладает над радиальной компонентой  $u_r$ . Там же отмечено, что постоянное (поршневое) распределение  $u_z$  по торцу, соответствующее одномерной теории, наблюдается только у основной моды пьезостержней при  $l/a > 1$  и не наблюдается у конечных круглых пластин. Поэтому эти моды и названы квазитолщинными. Показано [6], что квазитолщинные колебания формируются четвертой, седьмой, десятой, тринадцатой и последующими модами при определенных толщинах пьезопластины. Отметим также, что приведенные в работах [6, 7] и в этой статье типичные распределения  $u_z$  для пьезопластины со сплошными электродами находятся в хорошем соответствии с экспериментально измеренными распределениями, приведенными в [2, 3], что подтверждает правильность полученных численных результатов.

Распределения  $u_z$  и  $u_r$  седьмой и десятой мод по торцу пьезопластины со сплошными электродами при оптимальных (соответствующих максимуму ДКС) толщинах пластин приведены на рис. 6. На этом рисунке компоненты смещения нормированы на величину  $u_z$  в центре пластины. По оси абсцисс отложены номера равноотстоящих узловых точек, точке 1 соответствует ось симметрии пла-

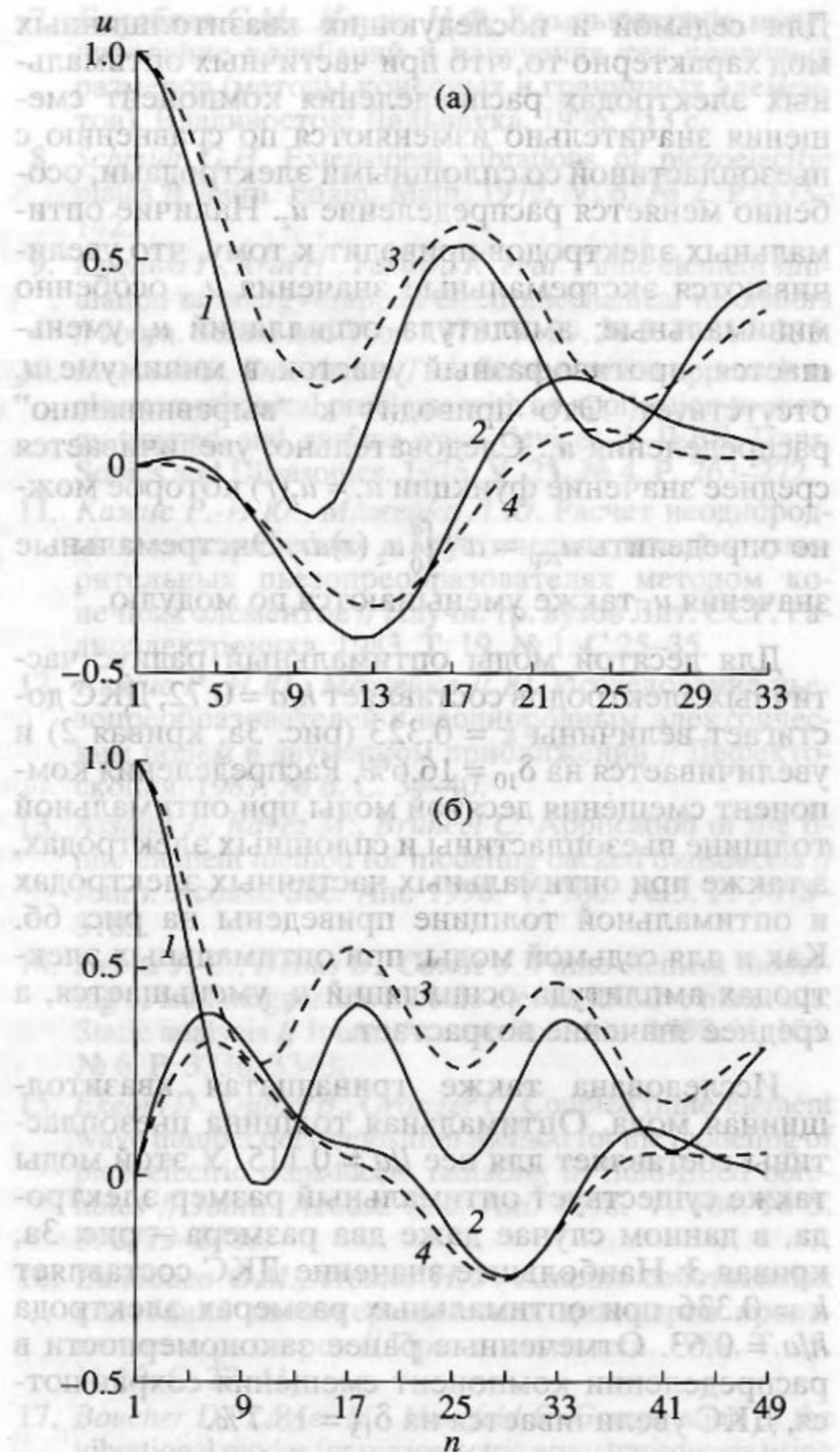
стины ( $r = 0$ ), последней точке (33 или 49 в зависимости от аппроксимации пьезопластины конечными элементами) соответствует значение  $r = a$ .

Рассмотрим вариант повышения ДКС четвертой моды, которая имеет один минимум  $u_z$  [6, 7], путем отключения участка электрода, расположенного в этом минимуме; этот вариант на рис. 1 не приведен. Отключается кольцевой участок, середина которого находится в точке  $n = 13$  (при 25 узловых точках). Обозначим через  $h_1$  расстояние между соседними узлами. При увеличении ширины отключаемого участка ДКС монотонно возрастает (от значения  $k = 0.286$  при сплошных электродах,  $l/a = 0.36$ ) и достигает максимального значения  $k = 0.348$  при ширине кольца  $18h_1$ . При этом электроды занимают только небольшую центральную часть радиусом  $3h_1$  и периферийную кольцевую часть шириной  $3h_1$ . При уменьшении толщины пластины с  $l/a = 0.36$  до  $l/a = 0.34$  ДКС немного увеличивается и достигает наибольшего значения  $k = 0.353$ , что составляет 0.86 от статического коэффициента связи  $k_s$  этой керамики. Таким образом, отключая значительную часть электрода, расположенную в минимуме  $u_z$ , можно поднять ДКС четвертой моды на величину  $\delta_4 = 23.4\%$ . Распределения компонент смещения при таком оптимальном электроде незначительно отличаются от распределений при сплошных электродах [6, 7]. Основные отличия связаны с тем, что немного увеличивается минимальное значение  $u_z$ . Этот эффект будет более заметен в дальнейшем для высших квазитолщинных мод.

Почти аналогичный результат можно получить только при одних кольцевых периферийных электродах – рис. 3б. В этом случае при кольцевых электродах  $b/a = 0.83$  ДКС достигает значения  $k = 0.346$  при  $l/a = 0.36$  и  $k = 0.351$  при  $l/a = 0.34$ . Отметим, что еще большего значения ДКС можно достичь, располагая кольцевой электрод на цилиндрической поверхности вблизи торца пьезопластины. Если электрод занимает верхнюю половину цилиндрической поверхности (т.е.  $z \in [l/2; l]$ ), то достигается максимальное значение ДКС  $k = 0.379$ . При этом одинаковый результат получается как при полном отсутствии электродов на торце пьезопластины, так и при кольцевых периферийных электродах шириной  $2h_1$ , при этом  $l/a = 0.34$ .

Для пьезопластины с частичными круговыми электродами характерно то, что ДКС четвертой моды при уменьшении радиуса частичных электродов падает, ДКС двух других квазитолщинных мод (седьмой и десятой) увеличивается. Исследуем возможность увеличения ДКС квазитолщинных мод за счет применения частичных круговых электродов.

Максимальный ДКС седьмой моды пьезопластины со сплошными электродами достигается при оптимальной толщине  $l/a = 0.21$  и составляет  $k = 0.273$ . При частичных электродах удается немного увеличить ДКС и при той же толщине пьезопластины он принимает максимальное значение  $k = 0.288$  при оптимальном радиусе электродов  $h/a = 0.69$ . При изменении толщины пластины до  $l/a = 0.23$  можно получить немного больший ДКС:  $k = 0.292$  при оптимальном радиусе электродов  $h/a = 0.63$ . Таким образом, с помощью частичных электродов удается повысить ДКС седьмой моды всего на  $\delta_7 = 7\%$ .



**Рис. 6.** Распределения осевой (1, 3) и радиальной (2, 4) компонент смещения по торцу пьезопластины оптимальной толщины, (1, 2) – сплошные электроды, (3, 4) – оптимальные круговые электроды, керамика ЦТБС-3, а – седьмая мода, (1, 2) –  $l/a = 0.21$ ,  $k = 0.273$ , (3, 4) –  $l/a = 0.23$ ,  $h/a = 0.63$ ,  $k = 0.292$ ; б – десятая мода,  $l/a = 0.15$ , (1, 2) –  $k = 0.277$ , (3, 4) –  $h/a = 0.72$ ,  $k = 0.323$ .

При частичных электродах удается немного увеличить ДКС и при той же толщине пьезопластины он принимает максимальное значение  $k = 0.288$  при оптимальном радиусе электродов  $h/a = 0.69$ . При изменении толщины пластины до  $l/a = 0.23$  можно получить немного больший ДКС:  $k = 0.292$  при оптимальном радиусе электродов  $h/a = 0.63$ . Таким образом, с помощью частичных электродов удается повысить ДКС седьмой моды всего на  $\delta_7 = 7\%$ .

Распределения компонент смещения седьмой моды приведены на рис. 6а при сплошных электродах и оптимальной толщине, а также при оптимальных электродах и оптимальной толщине.

Для седьмой и последующих квазитолщинных мод характерно то, что при частичных оптимальных электродах распределения компонент смещения значительно изменяются по сравнению с пьезопластиной со сплошными электродами, особенно меняется распределение  $u_z$ . Наличие оптимальных электродов приводит к тому, что увеличиваются экстремальные значения  $u_z$ , особенно минимальные; амплитуда осцилляций  $u_z$  уменьшается, противофазный участок в минимуме  $u_z$  отсутствует. Это приводит к "выравниванию" распределения  $u_z$ . Следовательно, увеличивается среднее значение функции  $u_z = u_z(r)$  которое можно определить  $u_{zcp} = a^{-1} \int_0^a u_z(r) dr$ . Экстремальные значения  $u_z$  также уменьшаются по модулю.

Для десятой моды оптимальный радиус частичных электродов составляет  $h/a = 0.72$ , ДКС достигает величины  $k = 0.323$  (рис. 3а, кривая 2) и увеличивается на  $\delta_{10} = 16.6\%$ . Распределения компонент смещения десятой моды при оптимальной толщине пьезопластины и сплошных электродах, а также при оптимальных частичных электродах и оптимальной толщине приведены на рис. 6б. Как и для седьмой моды, при оптимальных электродах амплитуда осцилляций  $u_z$  уменьшается, а среднее значение возрастает.

Исследована также тринадцатая квазитолщинная мода. Оптимальная толщина пьезопластины составляет для нее  $l/a = 0.115$ . У этой моды также существует оптимальный размер электрода, в данном случае даже два размера – рис. 3а, кривая 3. Наибольшее значение ДКС составляет  $k = 0.336$  при оптимальных размерах электрода  $h/a = 0.63$ . Отмеченные ранее закономерности в распределении компонент смещения сохраняются, ДКС увеличивается на  $\delta_{13} = 18.7\%$ .

Таким образом, при использовании частичных оптимальных электродов можно повысить ДКС квазитолщинных мод от 7% для седьмой моды до 23% для четвертой моды. При этом распределение нормальной компоненты смещения  $u_z$  изменяется: амплитуда осцилляций уменьшается, среднее значение возрастает.

Как отмечено в статье [6], по типу спектра и по величине ДКС квазитолщинных колебаний основные составы пьезокерамики можно разделить на два типа. Пьезокерамика ЦТБС-3 относится к первому типу по предложенной в [6] классификации. Максимальная величина ДКС квазитолщинных колебаний при оптимальных толщинах пьезопластины составляет для нее  $k \approx 0.7k_t$ ,  $k_t$  – статический коэффициент связи толщинных колебаний. Если принять среднее значение ДКС квазитолщинных колебаний при частичных оптимальных электродах  $k \approx 0.32$ , то можно приблизительно оценить ДКС через  $k_t$ :  $k \approx 0.78k_t \approx 0.8k_t$ . Следовательно, пьезокерамика ЦТБС-3 (первого типа) по

этому показателю приблизилась к пьезокерамике второго типа, для которого  $k \approx 0.8k_t$  [6].

Рассмотрим влияние неполного электродного покрытия на характеристики пьезопластины из керамики второго типа: НБС-1. ДКС первой радиальной моды при использовании частичных электродов немного повышается, как и у пьезопластины из керамики ЦТБС-3. При  $l/a = 0.12$  и оптимальном размере электродов  $h/a \approx 0.9$  он принимает наибольшее значение  $k = 0.341$ , тогда как при сплошных электродах  $k = 0.334$ . Исследовано влияние частичных электродов на характеристики квазитолщинных мод при оптимальных толщинах пьезопластины. Оказалось, что при помощи частичных электродов не удастся повысить ДКС ни одной из квазитолщинных мод.

Очевидно, что процесс преобразования энергии в пьезоэлементе является весьма сложным. Он зависит от геометрической формы пьезоэлемента и электродов, их размеров и постоянных пьезокерамики (упругих, пьезоэлектрических, диэлектрических и ее плотности). В каждом конкретном случае для полного понимания всех особенностей необходимо детальное исследование распределений электрического и упругого полей во всем объеме пьезоэлемента и их соответствия приложенному возбуждающему полю. Практические выводы проще сделать с помощью интегральных характеристик. Они необходимы при использовании пьезоэлементов и их можно экспериментально проверить. Этими интегральными характеристиками являются величина ДКС и распределение нормальной компоненты смещения на излучающей поверхности, которая важна для анализа работы пьезоэлемента с акустической нагрузкой.

Анализ распределений компонент смещения квазитолщинных мод пьезопластины из керамики НБС-1 (второго типа) при оптимальных толщинах пластины и сплошных электродах показывает [7], что они отличаются от соответствующих распределений для пьезопластины из керамики ЦТБС-3 (первого типа). Характерно, что эти распределения ближе к распределениям смещений пьезопластины из керамики ЦТБС-3 не со сплошными электродами, а с оптимальными. В этом случае у нормальной компоненты смещения  $u_z$  отсутствуют отрицательные участки в минимумах, среднее значение  $u_z$  больше, чем у пластины из пьезокерамики ЦТБС-3.

Таким образом, предложенная ранее классификация всех составов пьезокерамики на два типа оказывается полезной и при анализе влияния частичных электродов на характеристики квазитолщинных мод пьезопластины. Для проверки правильности этого предположения исследованы также характеристики квазитолщинных колебаний пьезопластин, изготовленных из других составов пьезокерамики, – ЦТСНВ-1 (первый тип) и ТБКС (второй тип). Отмеченные ранее разли-

чия в распределении компонент смещения квазитолщинных мод пьезопластин, изготовленных из керамики двух типов, сохраняются. Для пьезопластины из керамики ЦТСНВ-1 можно при помощи оптимальных частичных электродов увеличить ДКС квазитолщинных мод, например, для седьмой моды ДКС увеличивается на  $\delta_7 = 10\%$ . Для пьезопластины из керамики ТБКС повысить ДКС квазитолщинных мод при помощи частичных электродов не удается.

Следовательно, для пьезопластин, изготовленных из пьезокерамики первого типа (ЦТБС-3, ЦТСНВ-1, ЦТС-19), путем неполного покрытия их электродами удается повысить ДКС квазитолщинных мод до значения  $k \approx 0.8k_r$ . Для пьезопластин, изготовленных из пьезокерамики второго типа (НБС-1, ТБКС, ТБК-3), при помощи частичных электродов ДКС указанных мод увеличить не удается, и он составляет примерно такое же значение  $k \approx 0.8k_r$ . Иначе говоря, сплошные электроды являются оптимальными для квазитолщинных мод пьезопластин, изготовленных из керамики второго типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
2. Shaw E.A.G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // Journ. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. № 1. P. 38–50.
3. Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. 592 с.
4. Holland R., Eer Nisse E.P. Design of resonant piezoelectric devices. Cambridge: The M.I.T. Press, 1969. 258 p.
5. Kagawa Y., Yamabuchi T. Finite-element approach for a piezoelectric circular rod // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1976. V. 23. № 6. P. 379–385.
6. Ивина Н.Ф. Численный анализ собственных колебаний круглых пьезокерамических пластин конечных размеров // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 667–673.
7. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Компьютерное моделирование колебаний и излучения тел конечных размеров (методы конечных и граничных элементов). Владивосток: Дальнаука, 1996. 213 с.
8. Schmidt G.H. Extensional vibrations of piezoelectric plates // Journ. Engin. Math. 1972. V. 6. № 2. P. 133–142.
9. Kagawa Y., Arai H., Yakuwa K. et al. Finite element simulation of energy-trapped electromechanical resonators // Journ. Sound and Vibr. 1975. V. 39. № 3. P. 317–335.
10. Kagawa Y., Yamabuchi T. A finite element approach to electromechanical problems with an application to energy-trapped and surface-wave devices // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1976. V. 23. № 4. P. 263–272.
11. Кажис Р.-И.Ю., Мажейка Л.Ю. Расчет неоднородных электрических и акустических полей в измерительных пьезопреобразователях методом конечных элементов // Научн. тр. вузов Лит. ССР. Радиоэлектроника. 1983. Т. 19. № 1. С.25–35.
12. Кажис Р.-И.Ю., Мажейка Л.Ю. Исследование пьезопреобразователей с неоднородным электрическим полем в двумерном приближении // Дефектоскопия. 1987. № 6. С. 34–40.
13. Assaad J., Ravez M., Bruneel C. Application of the finite-element method for modeling backed transducers // Journ. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 5. P. 3098–3103.
14. Debus J.-C., Debus B., Coutte J. Finite element modeling of lead magnesium niobate electrostrictive materials: Static analysis // Journ. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. № 6. P. 3336–3343.
15. Ekeom D., Dubus B., Granger C. Coupled finite-element wave number decomposition method for the modeling of piezoelectric transducers radiating in fluid-filled boreholes // Journ. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. № 5. P. 2779–2789.
16. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Анализ собственных колебаний пьезокерамических цилиндров произвольных размеров // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 10. С. 37–41.
17. Boucher D., Lagier M., Maerfeld C. Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element-perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1981. V. 28. № 5. P. 318–330.
18. Пьезокерамические преобразователи / Под ред. Пугачева С.И. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.

### Analysis of the Natural Vibrations of Circular Piezoceramic Plates with Partial Electrodes

N. F. Ivina

The finite-element method is used to analyze the thickness-symmetric vibrations of piezoelectric plates with partial electrodes. The spectra of the natural vibrations at resonance and antiresonance, the dynamic electromechanical coupling coefficient, and the vibration modes of these plates are studied for a wide range of geometric dimensions of both the plates and the partial electrodes. The optimal dimensions of the plates and electrodes, which correspond to the maximal values of the coupling coefficient, are determined. The increase in the coupling coefficient due to the utilization of the partial electrodes is considered for piezoelectric plates made of ceramics of various compositions. It is shown that all piezoceramic compositions can be divided into two groups. For the first group, the utilization of the partial electrodes can increase the coupling coefficient of the thickness vibrations by 7–23%, depending on the vibration mode. For the second group of piezoceramics, the coupling coefficient cannot be increased in this way; in other words, complete electrodes are optimal for the thickness vibrations of plates made of piezoceramics that belongs to the second group.