

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

СПИРАЛЬНО-ВИНТОВЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ
ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2010 г. В. В. Тютюкин, А. И. Бойко

Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 2.07.09 г.

В статье описываются свойства спирально-винтовых волн, возникающих вблизи цилиндрической полости в упругой среде и являющихся проявлением неперриодических (по углу) решений динамических уравнений упругости. Определены дисперсионные характеристики этих волн, а также описана их пространственная структура.

Существует большое число работ, относящихся к исследованию волновых процессов в упругих телах, в частности, в цилиндрических волноводах (см., например, [1–3]). Отличительной особенностью этих работ является то, что в большинстве из них исследуются свойства нормальных волн, являющихся периодическими по углу θ (все физические величины, например, вектор смещения, описываются множителями $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$, n – целое). В других работах, например, [4, 5] рассматривались волны кругового типа, независимые от продольной координаты z и являющиеся бегущими волнами по углу θ , а не стоячими, как в предыдущем случае. В последнее время был опубликован ряд работ, исследующих нормальные волны в цилиндрических оболочках и акустических волноводах [6–10], в которых показано, что неперриодические решения ($\sim \exp(i\nu\theta)$) описывают нормальные волны спирально-винтового типа, имеющие ряд особенностей по сравнению с “обычными” волнами.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные решения (и волны) применительно к цилиндрической полости, расположенной в упругой среде. Первой работой, в которой исследовались волноводные свойства такого “объекта”, насколько нам известно, была работа Био [11], в которой были рассмотрены свойства осесимметричных ($n = 0$) нормальных волн. К настоящему времени появилось очень большое количество работ, посвященных исследованию подобных нормальных волн, в том числе, для других (целых) значений n [12].

Ниже рассматривается цилиндрическая полость радиуса a , ось которой совпадает с осью z цилиндрической системы координат; полость расположена в изотропной упругой среде, имею-

щей параметры: плотность ρ и коэффициенты Лямэ λ и μ .

Как известно, для гармонического процесса ($\exp(-i\omega t)$) упругие волновые поля в таком волноводе можно описать двумя потенциалами: скалярным ϕ и векторным $\vec{\Psi}$. Эти величины должны удовлетворять уравнениям [1]:

$$\Delta\phi + k_l^2\phi = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot rot } \vec{\Psi} - k_t^2\vec{\Psi} = 0, \quad (2)$$

а также граничному условию при $r = a$

$$\vec{\sigma} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{\sigma} = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})^T$ – вектор нормальных напряжений, T – знак транспонирования, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Гельмгольца, $k_l = \frac{\omega}{c_l}$ и $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ – волновые числа продольных и поперечных волн, соответственно. Дополнительными условиями для существования незатухающих по оси z нормальных волн являются:

$$\phi \rightarrow 0 \text{ и } \psi \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Решения уравнений (1) и (2), в соответствии с постановкой задачи, будем искать в виде

$$\phi(r, z, \theta) = \phi_0(r) \exp[i(kz + \nu\theta)], \quad (5)$$

$$\vec{\Psi}(r, z, \theta) = \vec{\psi}(r) \exp[i(kz + \nu\theta)]. \quad (6)$$

Здесь k и ν – произвольные параметры; функция $\phi_0(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \left(k_l^2 - k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \phi_0 = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7), удовлетворяющее первому из условий (4), записывается в виде

$$\varphi_0 = A_1 K_\nu(\alpha r), \quad (8)$$

где $K_\nu(\alpha r)$ — функция Макдональда порядка ν , $\alpha = \sqrt{k^2 - k_t^2}$, A_1 — произвольная постоянная. Отметим, что условие ограниченности величины φ_0 выполняется при всех $\nu \geq 0$.

Решение уравнения (2), с учетом (5), можно определить методом, изложенным в [1]. Необходимо отметить, что вектор $\vec{\psi}(r)$ имеет только две линейно независимых компоненты, и поэтому выбор решений и произвольных постоянных допускает определенный произвол. Полученные решения для компонентов вектора $\vec{\psi}(r)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_r &= A_2 K_{\nu+1}(\beta r); & \psi_\theta &= i A_2 K_{\nu+1}(\beta r); \\ \psi_z &= A_3 K_\nu(\beta r). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\beta = \sqrt{k^2 - k_l^2}$, A_2 и A_3 — произвольные постоянные.

Вектор смещения $\vec{U} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$ представляется в виде

$$\vec{U} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi}. \quad (10)$$

С учетом формул (6) и (7) его компоненты будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{d\varphi_0}{dr} + k\psi_r + \frac{i\nu}{r}\psi_z, \\ u_\theta &= \frac{i\nu}{r}\varphi_0 + ik\psi_r - \frac{d\psi_z}{dr}, \\ u_z &= ik\varphi_0 - i(\nu-1)\frac{\psi_r}{r} + i\frac{d\psi_r}{dr}. \end{aligned} \quad (11)$$

Составляющие вектора нормальных напряжений $\vec{\sigma}$, входящего в уравнение (3), можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \text{div}\vec{U} + 2\mu \frac{du_r}{dr}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{i\nu}{r} u_r \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(iku_r + \frac{du_z}{dr} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя выражения (12), с учетом формул (8), (9), (10) и (11), в граничное условие (3), получим однородную систему из трех алгебраических уравнений относительно постоянных A_1 , A_2 и A_3 . Дисперсионное уравнение для упругих волн будет иметь вид

$$D = 0, \quad (13)$$

где D — детерминант полученной системы уравнений, имеющий следующие значения элементов:

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\alpha a K'_\nu(\alpha a) + \left[\nu^2 - \frac{(k_t a)^2}{2} \right] K_\nu(\alpha a); \\ d_{12} &= \beta k a^2 K'_{\nu+1}(\beta a); \\ d_{13} &= i\nu \left[\beta a K'_\nu(\beta a) - K_\nu(\beta a) \right]; \\ d_{21} &= 2i\nu \left[\alpha a K'_\nu(\alpha a) - K_\nu(\alpha a) \right]; \\ d_{22} &= ika \left[(\nu-1) K_{\nu+1}(\beta a) + \beta a K'_{\nu+1}(\beta a) \right]; \\ d_{23} &= 2\beta a K'_\nu(\beta a) + \left[(\beta a)^2 - 2\nu^2 \right] K_\nu(\beta a); \\ d_{31} &= 2i\alpha k a^2 K'_\nu(\alpha a); \\ d_{32} &= \\ &= i \left\{ -\nu\beta a K'_{\nu+1}(\beta a) + \left[(k_t^2 + 2k^2) a^2 + \nu(\nu-1) \right] K_{\nu+1}(\beta a) \right\}; \\ d_{33} &= -\nu k a K_\nu(\beta a). \end{aligned} \quad (14)$$

При численном решении уравнение (13), с учетом формул (14), представлялось в виде:

$$D(P, C, \nu, \sigma) = 0,$$

где $P = (k_t a)^{-1} = \frac{\lambda_l}{2\pi a}$ — безразмерная длина сдвиговой волны, $C = \frac{c}{c_t}$ — безразмерная скорость

нормальной волны, ν — свободный параметр, σ — коэффициент Пуассона, известным образом выражающийся через коэффициенты Лямэ. Результаты расчетов представлены на рисунках 1 и 2 в виде зависимости величины $C(P)$ при различных значениях параметра ν для “крайних” значений $\sigma = 0$ и $\sigma = 0.5$, соответственно. Из приведенных рисунков можно определить общие закономерности поведения дисперсионных кривых.

Так, при каждом значении ν имеется только одна нормальная волна, при этом ее фазовая скорость при $P \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow \infty$) стремится к скорости рэлеевской волны независимо от величины ν . Кривые для $\nu = 0$ соответствуют результатам работы [11].

Каждая нормальная волна зарождается при некотором критическом значении $P = P_{кр}$, которое уменьшается при увеличении параметра ν . Зависимость величины $P_{кр}(\nu)$ для разных значений σ представлена на рис. 3. Величина ν по оси абсцисс приведена в логарифмическом масштабе.

Как показано в цитированных выше работах, решения типа (5) и (6) описывают так называемые

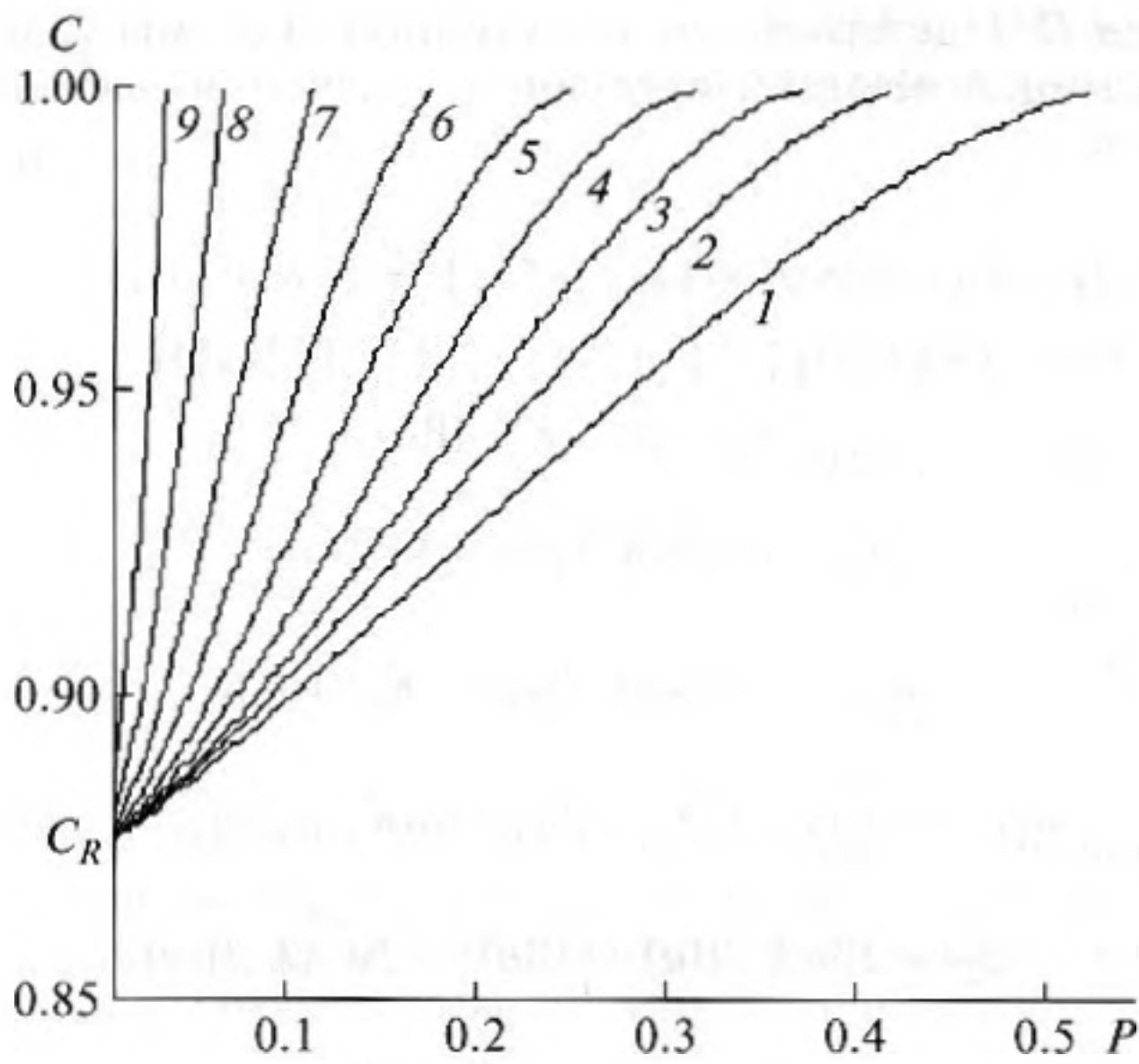


Рис. 1. Безразмерная фазовая скорость нормальных волн волновода для $\sigma = 0$.

1. $v = 0$; 2. $v = 0.1$; 3. $v = 0.2$; 4. $v = 0.4$; 5. $v = 0.8$; 6. $v = 1.6$; 7. $v = 3.2$; 8. $v = 6.4$; 9. $v = 12.8$.

мые спирально-винтовые волны, обладающие рядом специфических особенностей. Рассмотрим такие особенности применительно к исследуемому волноводу.

Обозначив фазу волны в этих решениях $\phi = kz + v\theta$ и следуя работе [7], введем в рассмотрение волновое число \vec{k}_B , определяемое соотношением

$$\vec{k}_B = \text{grad}\phi = k\vec{z} + \frac{v}{r}\vec{\theta}.$$

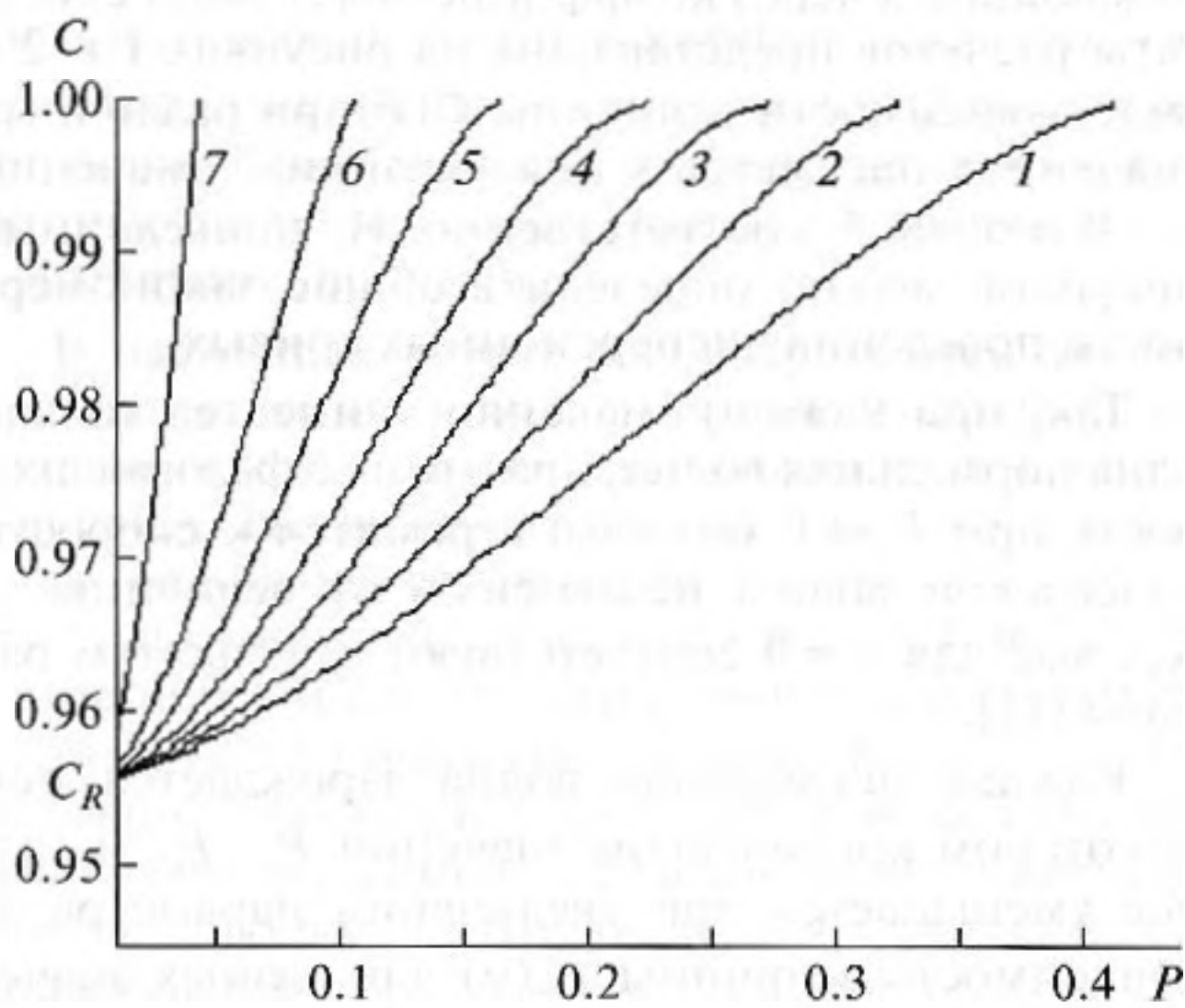


Рис. 2. То же, что и на рис. 1 для $\sigma = 0.5$.

1. $v = 0$; 2. $v = 0.1$; 3. $v = 0.25$; 4. $v = 0.5$; 5. $v = 1$; 6. $v = 2$; 7. $v = 6$.

Оно связано с волновыми числами k и $k_k = \frac{v}{r}$ (k_k — волновое число круговых волн [5, 6]) соотношениями

$$k_B^2 = k^2 + k_k^2 = k^2 + \frac{v^2}{r^2}; \quad k = k_B \cos\alpha, \quad k_k = k_B \sin\alpha,$$

где α — угол между вектором k_B и осью z . Вектор \vec{k}_B , также как вектора \vec{k}_k и \vec{k} , лежит в касательной плоскости к каждой цилиндрической поверхности $r = \text{const}$. Поскольку величина k_k зависит от радиуса, то и угол $\alpha = \alpha(r)$:

$$\text{tg}\alpha = \frac{v}{kr}. \quad (15)$$

Таким образом, по каждой такой поверхности под углом α к оси волновода распространяется винтовая волна с волновым числом k_B , подобно винтовым волнам на поверхности цилиндрической оболочки, рассмотренным в работе [7]. Не трудно видеть, что волновой фронт винтовой волны, определяемый соотношением $\phi = \text{const}$, перпендикулярен волновому вектору \vec{k}_B , и также образует винтовую линию. По мере увеличения величины r угол α уменьшается, и, следовательно, волновой вектор k_B постепенно поворачивается к оси волновода. На основании этих свойств винтовых волн их совокупность (во всем объеме волновода) можно трактовать как спиральную волну поверхностного типа.

Начальный угол, под которым волна “выходит” с поверхности полости, в соответствие с

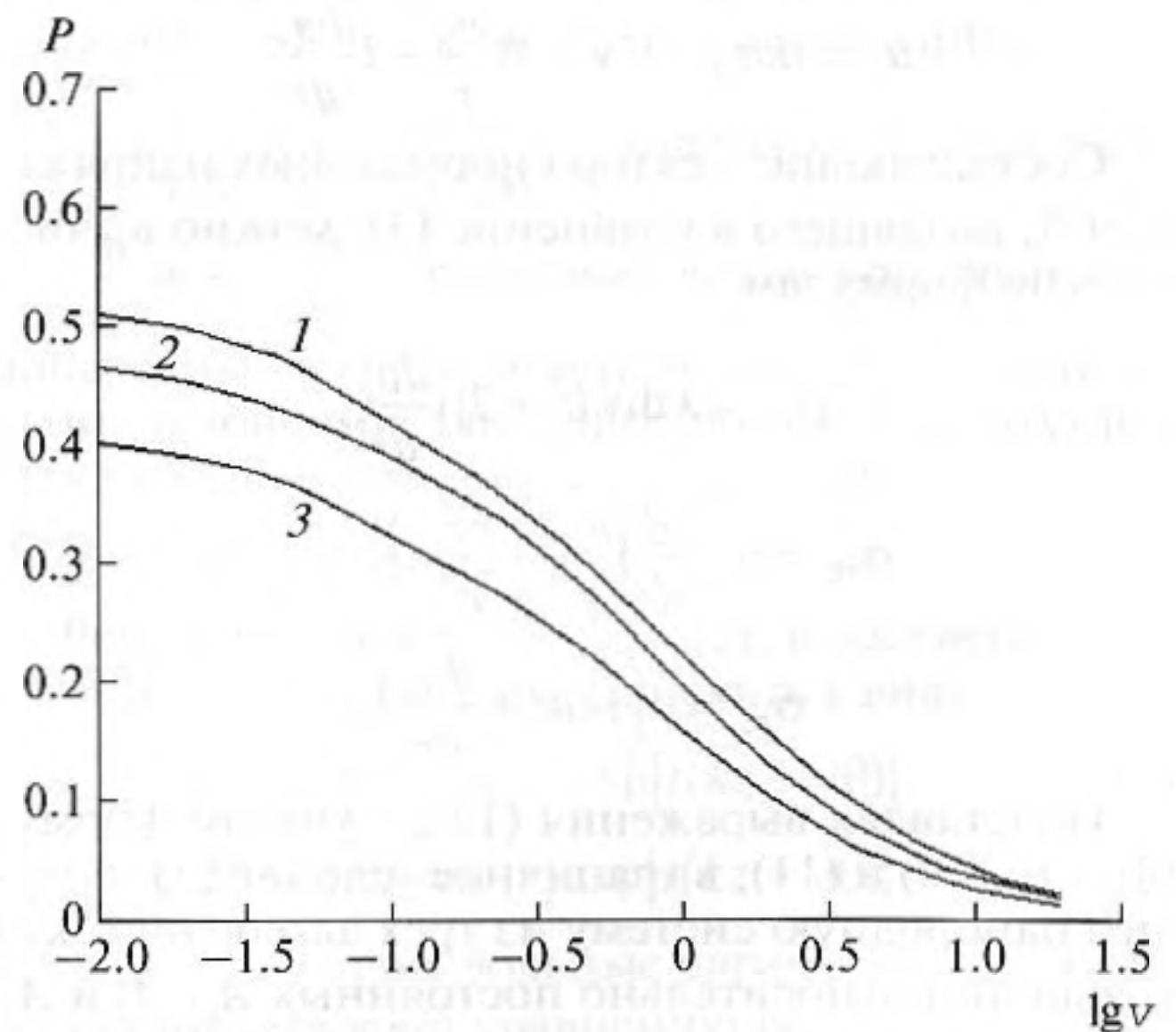


Рис. 3. Критические частоты нормальных волн волновода.

1. $\sigma = 0$; 2. $\sigma = 0.25$; 3. $\sigma = 0.5$.

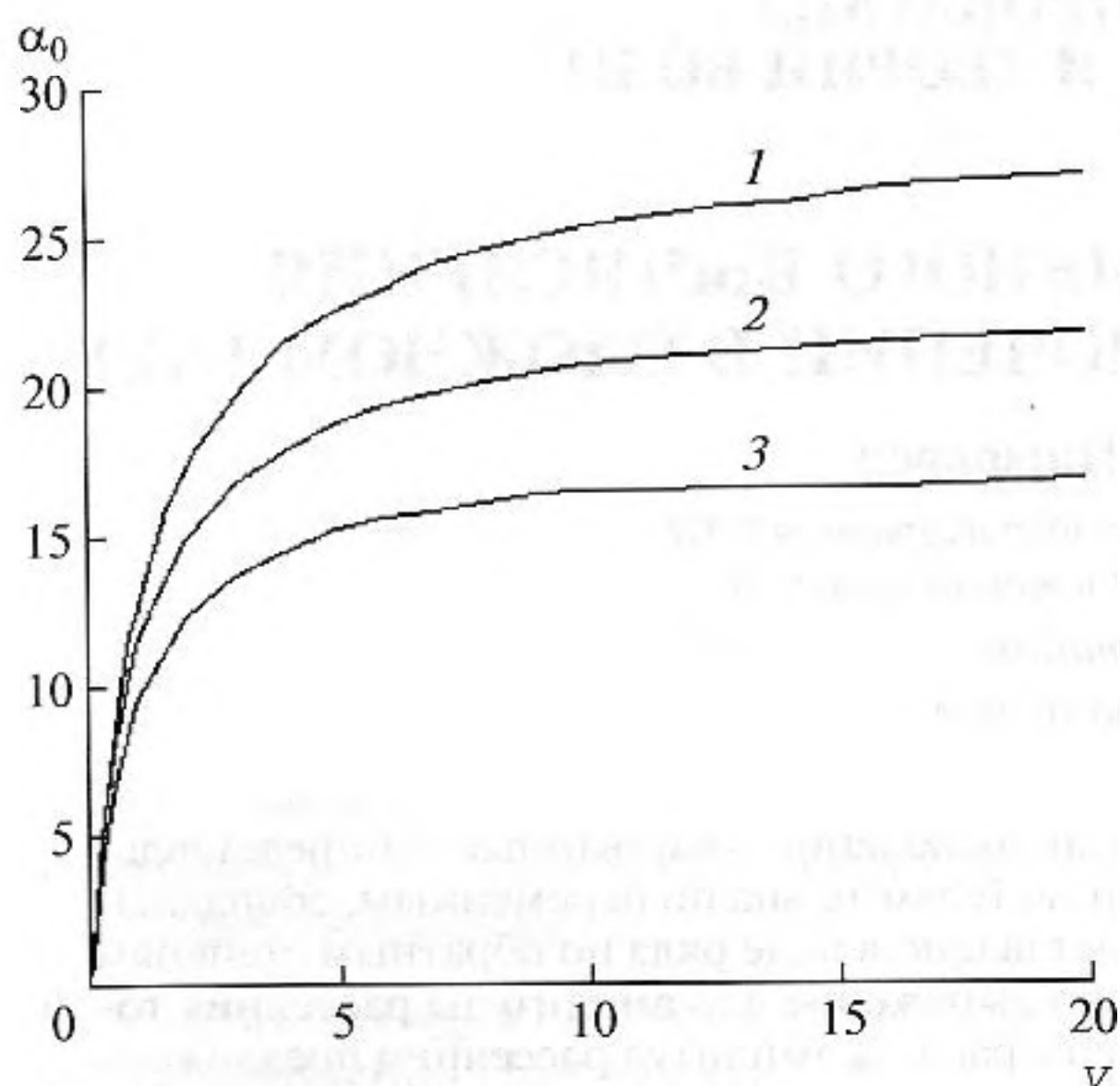


Рис. 4. Угол “выхода” волны на критических частотах.
1. $\sigma = 0$; 2. $\sigma = 0.25$; 3. $\sigma = 0.5$.

формулой (15), определяется соотношением

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\nu}{ka} = \arctg(\nu PC). \quad (16)$$

Применительно к рассмотренной выше задаче и используя полученные численные результаты, был рассчитан угол α_0 на критических частотах в зависимости от параметра ν для разных значений σ . В этом случае формула (16) приобретает вид

$$\alpha_0 = \arctg(\nu P_{кр}). \quad (17)$$

Результаты расчета приведены на рис. 4. Видно, что при $\nu \rightarrow \infty$ величина α_0 стремится к соответствующему (для каждого σ) предельному значению. Угол α_0 для каждой дисперсионной кривой (рис. 1 и 2) изменяется от значения, определяемо-

го формулой (17), до $\alpha_0 = 0$ (формула (16) при $P = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая акустика. Под ред. У. Мэсона. М.: Мир, 1966. Т. 1. 385 с.
2. Kumar Ram. Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled cylindrical shells // *Acustica*. 1972. V. 27. № 6. P. 317–329.
3. Kumar R. Axially symmetric vibrations of a thin cylindrical elastic shell filled with fluid // *Acustica*. 1966. V. 17. № 4. P. 218–222.
4. Vboulis G., Paipetis S.A., Theocaris P.S. Circumferential waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems // *J. Sound Vibrat.* 1974. V. 35. № 4. P. 521–533.
5. Бреховских Л.М. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы // *Акуст. журн.* 1960. Т. 13. № 4. С. 541–554.
6. Тютекин В.В. Нормальные волны кругового типа в полом упругом цилиндре // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 6. С. 855–864.
7. Тютекин В.В. О винтовых волнах упругой цилиндрической оболочки // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 3. С. 331–336.
8. Тютекин В.В. Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
9. Тютекин В.В. О свойствах круговых и спирально-винтовых волн цилиндрического волновода // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 1. С. 18–20.
10. Тютекин В.В. Спирально-винтовые волны в упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 4. С. 517–521.
11. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid // *Journal of Applied Physics*. 1952. V. 23. № 9. P. 997–1005.
12. Кит К.И., Крутин В.Н., Кузнецов О.Л. Физические основы акустического импедансного каротажа, основанного на возбуждении изгибных волн в скважине. Геология и геофизика // *СО АН СССР*. 1989. № 9. С. 112–117.