

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛОИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВЫЕ ПОЛОСТИ

© 2012 г. О. В. Руденко¹⁻⁴, А. Л. Собисевич², Л. Е. Собисевич², К. М. Хедберг³, Н. В. Шамаев¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 Москва, Ленинские горы

²Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123995 Москва, ул. Большая Грузинская 10

³Технологический институт Блекинге, инженерный факультет, 37179 Карлскрона, Швеция
Blekinge Institute of Technology, School of Engineering, 37179 Karlskrona, Sweden

⁴Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова 38
Поступила в редакцию 09.08.11 г.

Излагаются результаты анализа нелинейных колебаний и волн в простой модели зернистой среды, содержащей включения — слои жидкости и газовые поры. Показано, что в такой среде скорость распространения одной из волновых мод мала, а потому велика нелинейность и эффекты взаимодействия выражены сильнее обычного.

Ключевые слова: нелинейность, медленные волны, зернистая среда, резонатор Гельмгольца, интегро-дифференциальные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что гранулированная среда имеет хорошо выраженные нелинейные свойства. Наряду с обычными нелинейными эффектами — генерацией гармоник и волн комбинационных частот, уширением шумовых спектров — в таких структурах наблюдаются явления, необычные с точки зрения классической теории нелинейных волн [1]. К ним могут быть отнесены прямая (минуя каскад промежуточных гармоник) генерация гармоник с очень высокими номерами; многократное деление частоты и эффективная генерация низкочастотного спектра; появление выделенных полос пропускания, обеспечивающих прохождение через среду “доминантных” частот.

Механизмы нелинейности могут быть различными. Основные из них [1]:

1. Структурная — Герцевская — нелинейность контактов между зёрнами (гранулами) среды.
2. Геометрическая (кинематическая) нелинейность, связанная с конвективным членом в уравнении движения среды. Она может проявиться при обтекании зёрен флюидами.
3. Физическая нелинейность газовых пор, проявляющаяся при их сильном деформировании.
4. “Хлопающая” нелинейность, возникающая благодаря тому, что в фазе разрежения частицы могут свободно отдаляться друг от друга.

Известны модели пористых сред, позволившие решать множество важных задач. Например, мо-

дель Био [2] описывает важный эффект — существование двух различных волновых мод. Одна из них (“каркасная” мода) бежит по структуре соприкасающихся твёрдых гранул. Вторая возникает за счёт сжимаемости среды в порах. Эта модель усовершенствована Николаевским [3].

Однако универсальный феноменологический вывод уравнений, наряду с очевидными преимуществами перед “микроскопическим” выводом, не гарантирует учёта всех деталей и, следовательно, адекватность общей модели данной конкретной среде.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ СРЕДЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нелинейная модель насыщенной жидкостью гранулированной среды исследована в работе [4]. В работе [5] рассмотрена пористая среда, содержащая газовые полости и слои жидкости (пленки) между гранулами. Такую структуру имеет влажный песок, а также некоторые виды почв и скальных пород.

Моделью этой среды может служить цепочка связанных резонаторов Гельмгольца, в горле которых находится столбик жидкости [5]. В отличие от предыдущих работ, здесь относительное изменение объема полостей резонаторов не предполагается малым, то есть исследуются колебания, в которых может проявляться физическая нелиней-

ность [6]. Нелинейные колебания одиночного резонатора Гельмгольца изучены в работах [7, 8].

Система дифференциально-разностных уравнений для цепочки, изображенной на рис. 1, имеет вид

$$\rho_1 l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial y^2} \right) = p_{n-1} - p_n, \quad (1)$$

$$p_n = -c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} (\xi_{n+1} - \xi_n) + \varepsilon c_0^2 \rho_0 \frac{S^2}{V_0^2} (\xi_{n+1} - \xi_n)^2$$

Первое из них — уравнение движения жидкостного слоя, учитывающее кинематическую вязкость $\nu = \eta/\rho_1$, где ρ_1 — плотность жидкости, η — коэффициент ее сдвиговой вязкости. Второе уравнение есть следствие адиабатического уравнения состояния газа, у которого c_0 , ρ_0 , ε — равновесная скорость звука, плотность и нелинейность, причем

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2},$$

p_0 — равновесное (в отсутствие волны) давление газа в полости. Другие обозначения: l , S — это длина столбика жидкости и его поперечное сечение, V_0 — равновесный объем воздушной полости. Разумеется, реальная гранулированная среда сильно отличается от показанной на рис. 1 идеализированной модели с регулярным расположением идентичных элементов цепочки. Поэтому под перечисленными выше геометрическими параметрами нужно понимать их некие усредненные значения, а соответствующие численные оценки считать достоверными лишь по порядку величины.

3. КОЛЕБАНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ФРАГМЕНТОВ ЦЕПочки И ВНУТРЕННИЕ РЕЗОНАНСЫ

Прежде, чем переходить к рассмотрению волновых процессов в связанных резонаторах, рассмотрим изолированные колебания отдельных элементов.

3.1. Колебания единичной полости. Простейшим структурным элементом является резонатор Гельмгольца с номером n , изображенный на рис. 2.

Изолированные колебания возможны при следующих условиях: горло резонатора открыто и слева от него $p_{n-1} = 0$; столбик жидкости справа зафиксирован, $\xi_{n+1} = 0$, и двигаться не может. Колебания под действием упругой силы, возникающей при деформировании полости с номером n , совершает лишь левый столбик, то есть $p_n \neq 0$, $\xi_n \neq 0$. Эти колебания описываются уравнением, следующим из системы (1):

$$\rho_1 l \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} + c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} \xi_n + \varepsilon c_0^2 \rho_0 \frac{S^2}{V_0^2} \xi_n^2 = \nu \rho_1 l \frac{\partial^3 \xi_n}{\partial t \partial y^2}. \quad (2)$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\omega_0^2 = c_0^2 \frac{\rho_0 S}{\rho_1 V_0 l}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \xi_A \frac{S}{V_0}, \quad C = \frac{\xi_n}{\xi_A}, \quad (3)$$

где ξ_A — характерное значение амплитуды колебаний. В этих обозначениях уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \omega_0^2 C + \varepsilon_* \omega_0^2 C^2 = \nu \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial y^2}. \quad (4)$$

Если пренебречь трением, описываемым правой частью уравнения (4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебания с квадратичной нелинейностью. Нетрудно видеть, что величина ω_0 есть собственная частота линейных колебаний малой амплитуды. Обыкновенное уравнение второго порядка один раз интегрируется:

$$\dot{C}^2 = D^2 - C^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_* C^3. \quad (5)$$

Здесь точкой обозначена производная по нормированному времени $\omega_0 t$, а D^2 — положительная константа интегрирования. Фазовая плоскость для уравнения (5) качественно изображена на рис. 3.

Колебания малой амплитуды, которым на рис. 3 соответствуют эллиптические траектории с малыми размерами полуосей, происходят с частотой ω_0 . С ростом амплитуды размеры замкнутых траекторий на фазовой плоскости увеличиваются, их исходная эллиптическая форма искажается. Профиль периодических колебаний во времени содержит высшие гармоники, а основная частота уменьшается по сравнению со своим “линейным” значением ω_0 . Форма этих колебаний выражается через эллиптические функции Якоби весьма сложным образом и здесь не приводится. Наконец, движению по сепаратрисе (значение $D^2 = 1/(3\varepsilon_*)$ в уравнении (5)) на фазовой плоскости отвечает импульсное возмущение, имеющее форму “солитона” [9]:

$$\xi = \frac{3V_0}{2\varepsilon S} \left[\operatorname{ch}^{-2}(\omega_0(t-t_0)) - \frac{2}{3} \right]. \quad (6)$$

Движение (6) выглядит следующим образом. Столбик жидкости при $t \rightarrow -\infty$ был отклонен влево на величину $\xi_{\min} = -V_0/(\varepsilon S)$. С ростом времени столбик начинает двигаться вправо, смещение проходит через максимум $\xi_{\max} = V_0/(2\varepsilon S)$ и вновь, при $t \rightarrow \infty$, стремится к исходному значению ξ_{\min} .

Ясно, что в процессе нелинейных колебаний с ростом амплитуды происходит уширение спектра в область низких частот $\omega < \omega_0$.

Затухание колебаний, происходящее из-за вязкого трения жидкости, производится способом, описанным в следующем разделе для всей цепочки. Это уравнение оказывается интегро-дифференциальным.

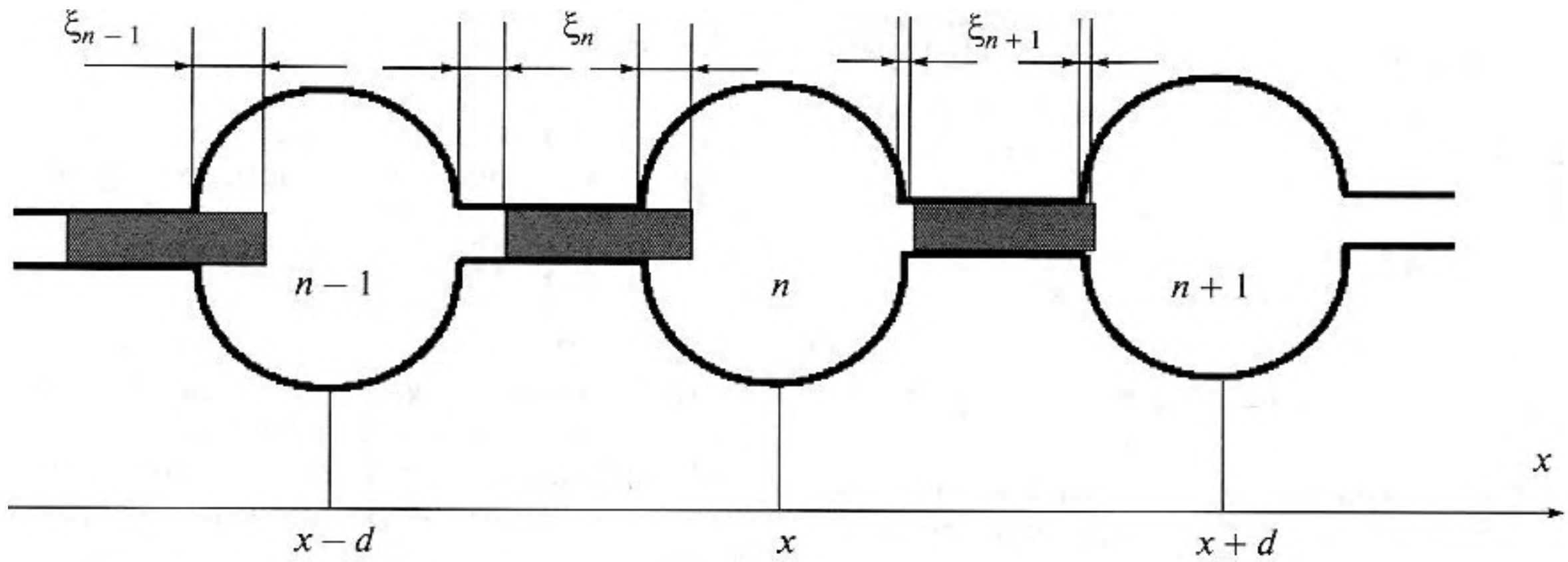


Рис. 1. Цепочка резонаторов Гельмгольца.

3.2. Колебания жидкого столба между двумя полостями. Пусть теперь единственный столбик жидкости совершает колебания между полостями с номером n и $n - 1$, изображенными на рис. 4.

В остальных полостях сохраняется равновесное давление; другие жидкие элементы зафиксированы. В уравнениях (1) нужно считать отличными от нуля лишь переменные p_{n-1} , p_n , ξ_n . При этом получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 \xi_n = v \frac{\partial^3 \xi_n}{\partial t \partial y^2}. \quad (7)$$

Заметим, что собственная частота этих колебаний в $\sqrt{2}$ раз больше, чем частота колебаний одиночного резонатора Гельмгольца (2). Кроме того, в отличие от уравнения (2), в уравнении (7) отсутствует нелинейный член. Очевидно, что рассмотренный тип колебаний симметричен относительно изменения направления смещения. Следовательно, квадратичная нелинейность здесь действительно не может проявляться. Низшей по порядку будет кубическая нелинейность. Если ее учесть, получится уравнение типа (4):

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 C - \beta_* \omega_0^2 C^3 = v \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial y^2}.$$

Здесь мы считаем $\beta_* > 0$ – сжимаемость увеличивается с ростом деформации; именно в этом случае кубическая нелинейность приносит интересные качественные особенности. В отсутствие трения это уравнение интегрируется и из него получается уравнение первого порядка (сравните с (5)):

$$\dot{C}^2 = D^2 - 2C^2 + \frac{\beta_*}{2} C^4.$$

Фазовая плоскость для этого уравнения изображена на рис. 5. Внутри сепаратрисы лежат замкнутые траектории, отвечающие периодическим колебаниям. Движению по сепаратрисе отвечает значение константы $D^2 = 2/\beta_*$. Соответствующее решение имеет вид

$$C = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_*}} \operatorname{th}(\omega_0(t - t_0)).$$

Знак “плюс” отвечает переходу из точки $C = -\sqrt{2/\beta_*}$ (при $t = -\infty$) в точку $C = \sqrt{2/\beta_*}$ (при $t =$

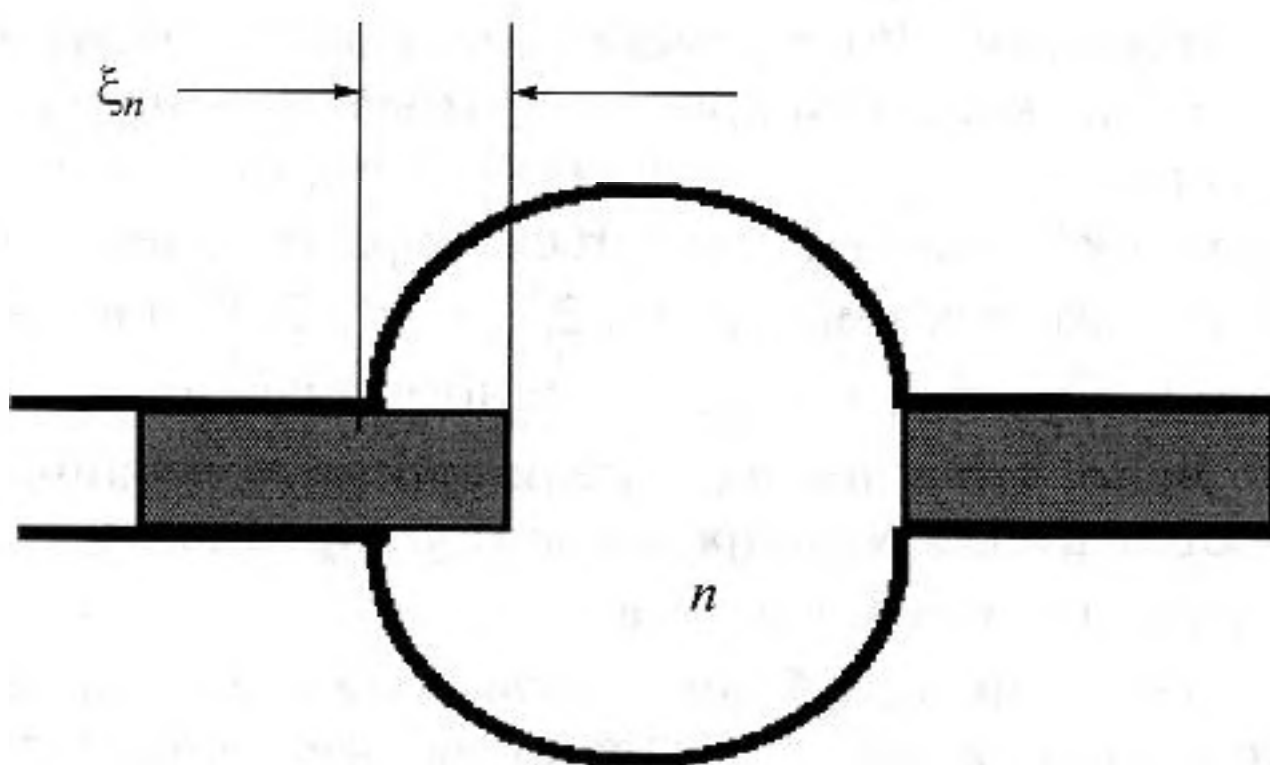


Рис. 2. Колебания в отдельном резонаторе.

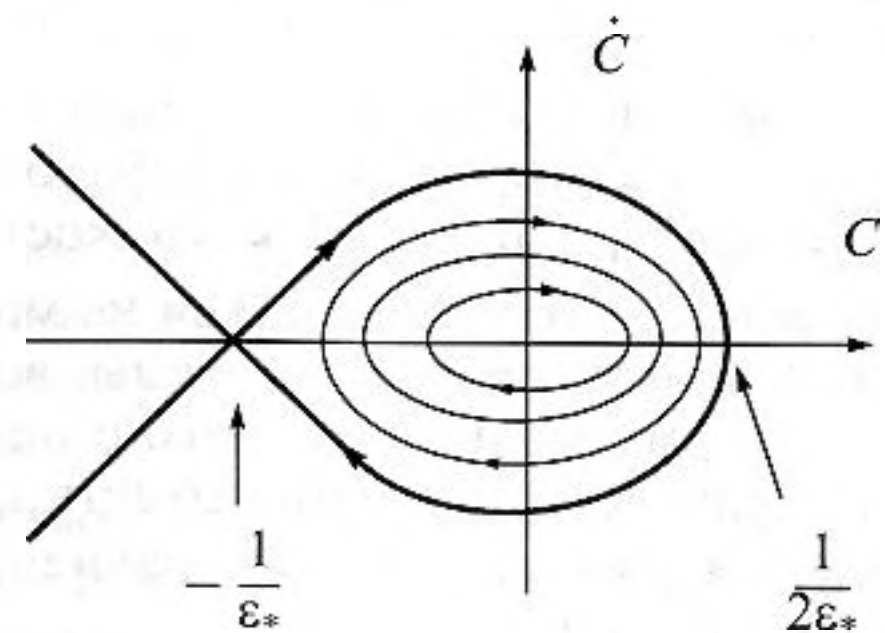


Рис. 3. Участок фазовой плоскости для уравнения (5). Тонкие линии отвечают периодическим колебаниям. Толстая петля – сепаратриса.

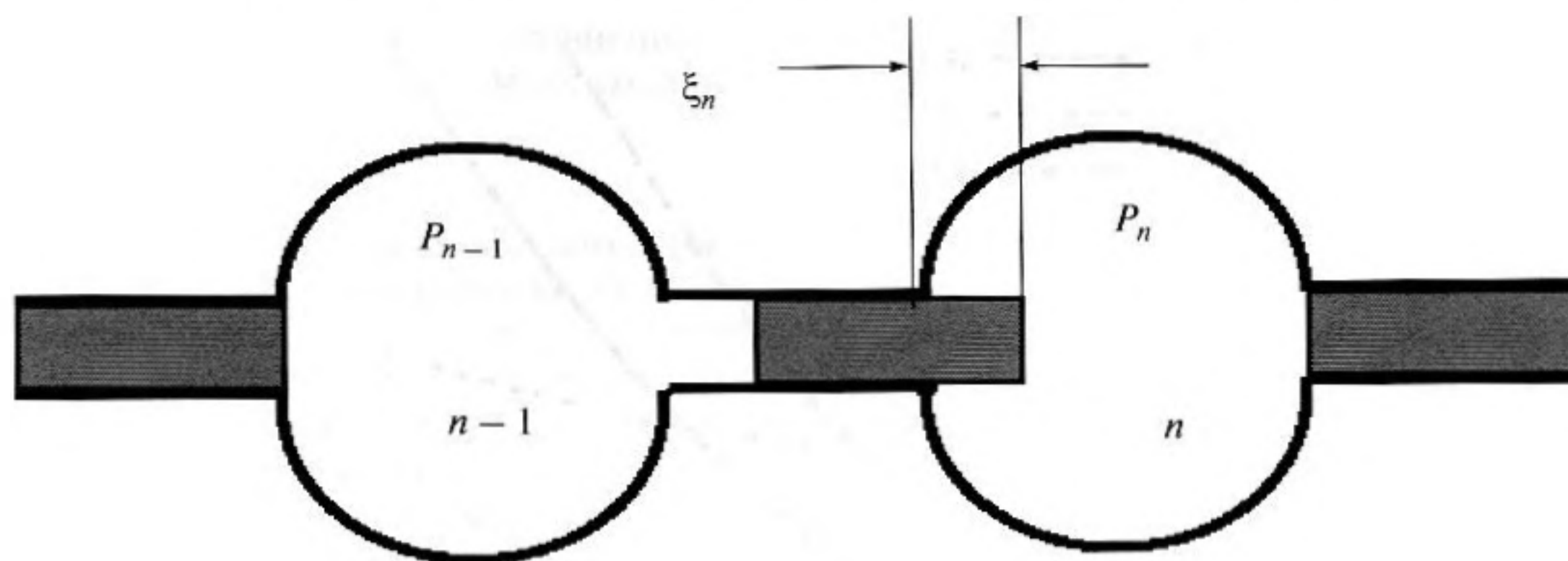


Рис. 4. Колебания жидкости между двумя полостями.

= +∞). Знак “минус” соответствует обратному переходу. Таким образом, вместо “солитона” (6) формируется движение типа “кинк”.

4. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ

Рассмотрим вначале гармонические колебания малой амплитуды, считая, что в системе уравнений (1) акустическое давление и смещение изменяются во времени по гармоническому закону ~exp(-iωt). Тогда уравнение (1) колебаний слоя примет вид

$$-\omega^2 \xi_n + i\omega v \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial y^2} = \frac{p_{n-1} - p_n}{\rho_1 l} \equiv F. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) с граничными условиями равенства нулю смещений на границах $\xi_n(y = \pm a) = 0$ имеет вид

$$\xi_n = -\frac{F}{\omega^2} \left[1 - \frac{\exp(\beta(1-i)y) + \exp(-\beta(1-i)y)}{\exp(\beta(1-i)a) + \exp(-\beta(1-i)a)} \right]. \quad (9)$$

Здесь посредством $\beta = \sqrt{\omega/2v}$ обозначена обратная толщина акустического пограничного слоя.

Поскольку нас не интересует распределение смещений по толщине жидкой пленки, проведем усреднение уравнения колебаний по сечению:

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \xi_n(y) dy.$$

В дальнейшем черту над усредненным смещением будем опускать. Уравнение (1) примет вид:

$$-\omega^2 \xi_n + i\omega \frac{v}{2a} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \Big|_{-a}^a = F. \quad (10)$$

Второй член в левой части этого уравнения вычисляется с помощью решения (9):

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \Big|_{-a}^a = \quad (11)$$

$$= 2F(1-i) \frac{\beta \operatorname{sh}(\beta a) \operatorname{ch}(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{\omega^2 \operatorname{ch}^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)}.$$

Подставляя (11) в (10), получаем для гармонических колебаний слоя (2) следующее соотношение:

$$-\omega^2 \xi_n = \left[1 - \frac{(1+i)}{2(\beta a)} \times \frac{\operatorname{sh}(\beta a) \operatorname{ch}(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{\operatorname{ch}^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)} \right] \frac{p_{n-1} - p_n}{\rho_1 l}. \quad (12)$$

Добавим к нему линейризованное уравнение состояния

$$p_n = -c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} (\xi_{n+1} - \xi_n). \quad (13)$$

Из системы разностных соотношений (12), (13) найдем закон дисперсии, положив

$$\begin{pmatrix} p_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_n \\ S_n \end{pmatrix} \exp(iknd),$$

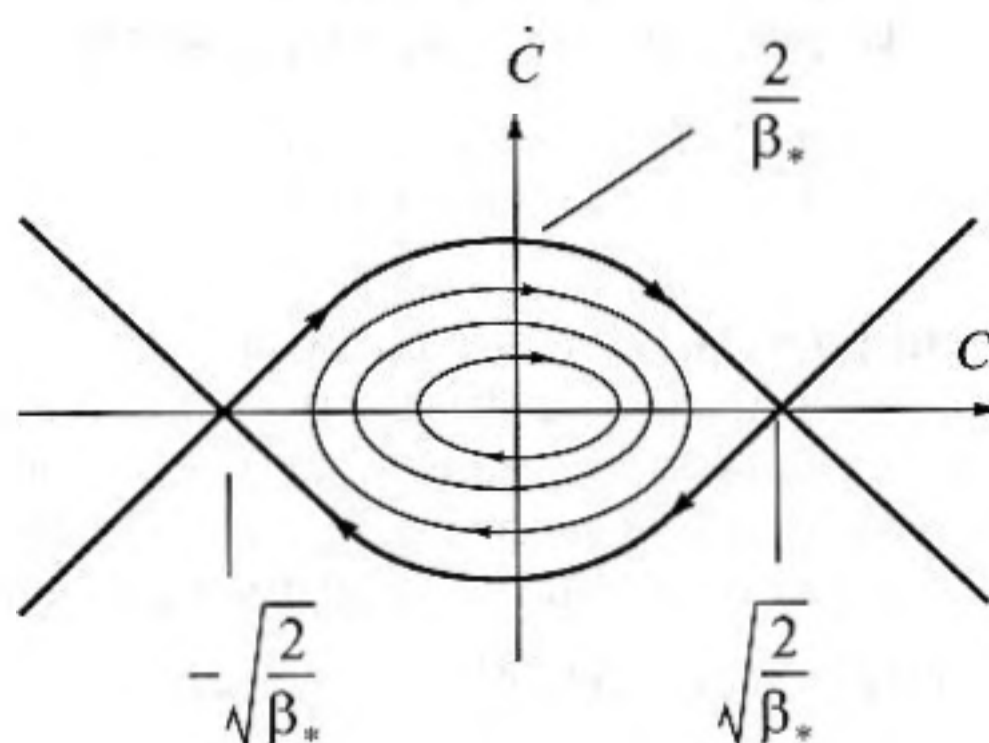


Рис. 5. Участок фазовой плоскости для уравнения с кубичной нелинейностью. Тонкие линии отвечают периодическим колебаниям. Толстая петля – сепаратриса.

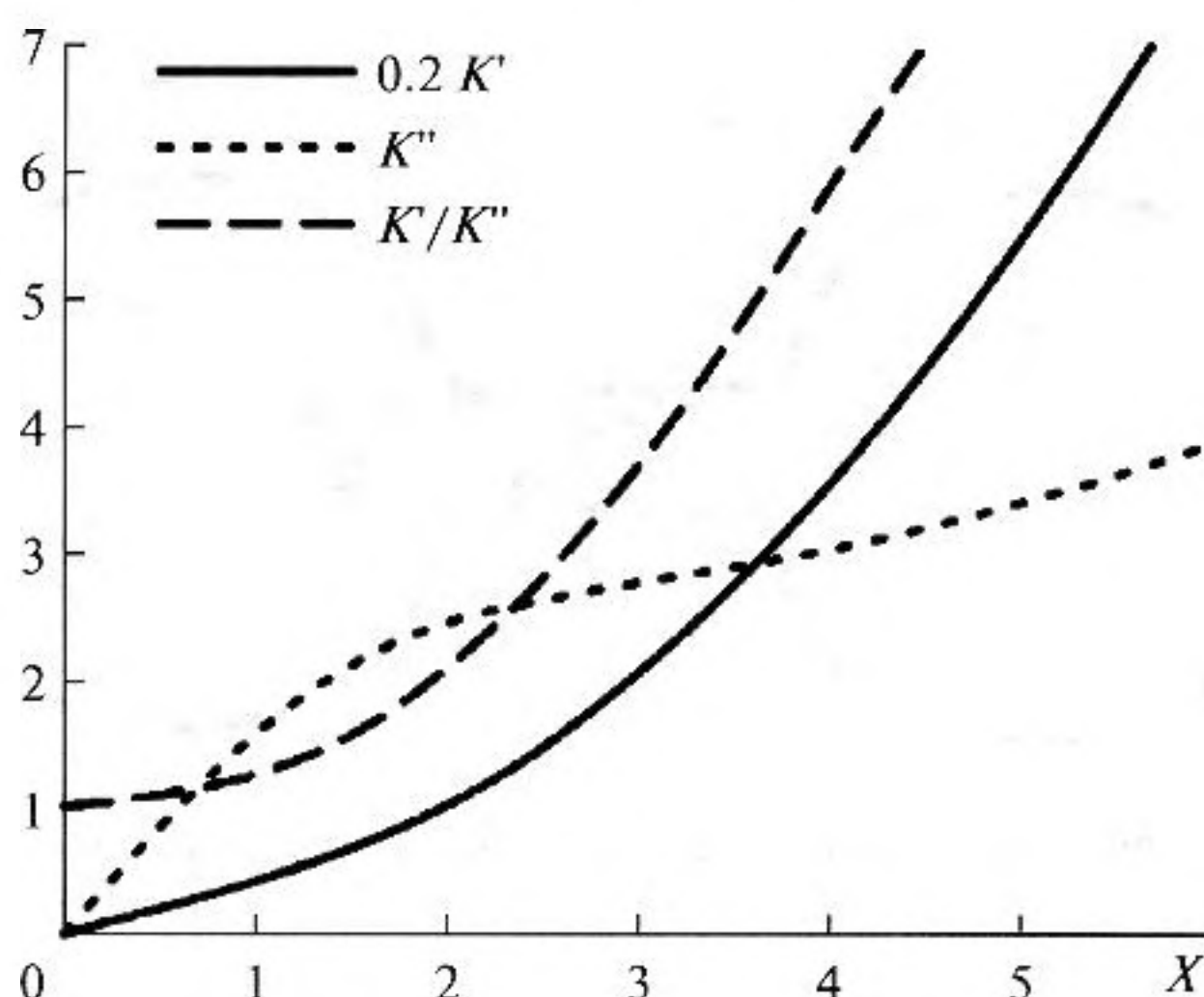


Рис. 6. Действительная и мнимая части комплексного волнового числа и их отношение в зависимости от $X = 2\beta a$.

где d — пространственный период цепочки. Для комплексных амплитуд Q_n, S_n из системы уравнений (12), (13) получим

$$\omega^2 S_n + \frac{D}{\rho_1 l} [\exp(-ikd) - 1] Q_n = 0, \quad (14)$$

$$c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} [\exp(ikd) - 1] S_n + Q_n = 0.$$

Здесь для краткости буквой $D = D(\omega)$ обозначено выражение, стоящее в формуле (12) в квадратных скобках.

Дисперсионное уравнение находится из условия равенства нулю детерминанта системы (14). Оно имеет вид

$$\frac{\omega^2}{D(\omega)} = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (15)$$

5. СЛУЧАИ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ЧАСТОТ, ДИФFUЗИОННОЕ И ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь различные частные случаи, в которых дисперсионное уравнение (15) упрощается.

Случай $\beta a \ll 1$. Пусть толщина слоя жидкости мала по сравнению с толщиной пограничного слоя. Это означает, что малой величиной является произведение параметров βa . Разлагая выражение $D = D(\omega)$ в ряд по малым значениям βa с сохранением членов порядка $(\beta a)^3$, получим

$$D \approx -i \frac{2}{3} (\beta a)^2 = -i \frac{\omega}{3\nu} a^2. \quad (16)$$

В этом предельном случае дисперсионное уравнение (15) примет вид

$$i\omega = \frac{4a^2}{3\nu} \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (17)$$

Видно, что частота ω является мнимой величиной, которая по абсолютному значению не превосходит некоторого максимального значения:

$$|\omega| < \frac{4a^2}{3\nu} \omega_0^2.$$

Если длина акустической волны много больше пространственного периода цепочки, синус в формуле (17) можно (при $kd \ll 1$) приближенно заменить значением его аргумента. Этой замене соответствует предельный переход от дискретной цепочки к континуальной модели. Как нетрудно видеть, процесс распространения возмущений при этом описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \kappa = \frac{a^2 d^2}{3\nu} \omega_0^2. \quad (18)$$

Итак, в случае очень тонкого слоя волновой процесс такого типа в рассматриваемой среде существовать не может — пленки жидкости слишком «загустевшие». С уменьшением вязкости ν подвижность жидкости усиливается и коэффициент диффузии κ растет.

Случай $\beta a \gg 1$. Пусть теперь толщина слоя жидкости велика по сравнению с толщиной пограничного слоя. Этот случай соответствует высоким частотам колебаний среды; при этом произведение параметров βa есть большая величина, и

$$D \approx 1 - \frac{1+i}{2(\beta a)} = 1 - \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega a^2}}. \quad (19)$$

Дисперсионное уравнение (15) с учетом (19) примет вид

$$\omega^2 + \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{a^2}} \omega^{3/2} = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (20)$$

При значении $\beta a \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (20) описывает незатухающую волну, максимальная частота которой

$$\omega = \omega_{\max} = 2\omega_0 \quad (21)$$

достигается для предельно короткой волны, длина которой равна двум периодам цепочки ($\lambda = 2d$). Учет конечности βa , как видно из формулы (20), немного уменьшает значение ω_{\max} и приводит к появлению малой мнимой части, ответственной за затухание. В континуальном пределе $kd \ll 1$ дисперсионному уравнению (20) можно сопоставить следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{v}{\pi a^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t \xi(t', x) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (22)$$

$$c^2 = c_0^2 \frac{\rho_0 d^2 S}{\rho_l V_0}.$$

Полезно также, имея в виду дальнейшее обобщение на нелинейные задачи, наряду с уравнением (22) выписать соответствующее ему уравнение эволюционного типа. Для этого следует воспользоваться методом медленно изменяющегося профиля [8–10] и, считая интегральный член малым по сравнению с двумя другими членами уравнения (22), с помощью стандартной процедуры упрощения, перейти от переменных t, x к новым независимым переменным $\tau = t - x/c, x_1 = \mu x$. Здесь μ – малый параметр, указывающий на “медленность” искажения формы профиля волны по мере ее распространения. Упрощая уравнение (22) с помощью стандартной процедуры, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{v}{\pi a^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \xi(\tau - \tau', x) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} = 0. \quad (23)$$

С учетом квадратично-нелинейного члена эволюционное уравнение примет вид [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{v}{\pi a^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty u(\tau - \tau', x) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} = 0.$$

Здесь $u = \partial \xi / \partial \tau$ – колебательная скорость в акустической волне.

Решение уравнения (23) для гармонической волны таково:

$$\xi = \xi_0 \exp\left(-i\omega\tau + i\frac{\sqrt{2\omega v}}{4ca}x\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2\omega v}}{4ca}x\right). \quad (24)$$

Видно, что учет трения немного изменяет скорость распространения волны и приводит к ее затуханию. Коэффициент затухания при этом растет с частотой как $\sqrt{\omega}$.

Заметим, что интегро-дифференциальные уравнения типа (22), (23) использовались ранее для описания различных проблем: трения в горле резонатора Гельмгольца [7], а также трения в мы-

шечных волокнах [12] и в коллоидных растворах наночастиц [13].

Общий случай – значения βa произвольны, но рассматривается континуальный предел. Дисперсионное уравнение (12) запишется так:

$$\omega^2 = c^2 k^2 D(\omega).$$

В расчетах удобна другая форма этого выражения, справедливая для волны, бегущей в положительном направлении оси x :

$$\frac{ca^2}{2v} k \equiv \frac{1}{4} K(\beta a) = (\beta a)^2 \times \left[1 - \frac{(1+i) \operatorname{sh}(\beta a) \operatorname{ch}(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{2(\beta a) \operatorname{ch}^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)} \right]^{-1/2} \quad (25)$$

Для простоты обозначим $2\beta a \equiv X$ и перепишем формулу (25) следующим образом:

$$K = K' + iK'' = X^2 \left[1 - \frac{1 \operatorname{sh} X + \sin X}{X \operatorname{ch} X + \cos X} - \frac{i \operatorname{sh} X - \sin X}{X \operatorname{cosh} X + \cos X} \right]^{-1/2} \quad (26)$$

На рис. 6 изображены действительная K' и мнимая K'' части нормированного волнового числа K как функции параметра $X = 2\beta a$, который пропорционален корню из частоты. Видно, что при малых значениях X мнимая часть K'' равна действительной части K' :

$$K = \sqrt{3}(1-i)X. \quad (27)$$

Это означает, что колебания сильно поглощаются (на расстояниях, меньших или порядка длины волны) и не могут распространяться в среде в виде бегущей волны. При увеличении X действительная часть становится гораздо больше мнимой,

$$K = X^2 + (1+i)X/2, \quad (28)$$

и можно говорить о том, что в среде возникают бегущие волны. Критерием возникновения бегущих волн является малость затухания на длине волны:

$$k''\lambda \ll 1, \quad 2\pi K''(X)/X^2 \ll 1. \quad (29)$$

Подставляя в (29) мнимую часть выражения (28), получим критерий перехода $X \gg \pi$. Условно можно принять более слабое неравенство $X > 2\pi$, отвечающее затуханию в “ e ” раз на расстоянии $x = 2\lambda$.

С ростом частоты затухание за счет вязкого трения при колебаниях пленок жидкости между зернами уменьшается и им можно пренебречь. Однако при этом становятся существенными иные механизмы трения, а также рассеяние волн на гранулах. Чтобы учесть эти механизмы потерь, нужно обобщить рассмотренную выше модель.

6. ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ И СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Оценим максимально возможную частоту и скорость распространения медленной волны во влажной гранулированной среде. Пусть размер

гранул – порядка 1 мм, при этом толщина жидкой пленки a – порядка 0.1 мм. Следовательно, длина пленки $l \sim 1$ мм и ее площадь $S \sim 0.2$ мм². Объем пузырька воздуха должен быть в несколько раз меньше объема гранулы, например, на порядок: $V_0 \sim 0.1$ мм³. Скорость звука в воздухе $c_0 = 330$ м/с, отношение плотностей воздуха и воды $\rho_0/\rho_1 = 1.3 \times 10^{-3}$. Подставляя эти численные значения в формулу (21), получим оценку

$$f_{\max} = \frac{c_0}{2\pi} \left(4 \frac{\rho_0 S}{\rho_1 l V_0} \right)^{1/2} \sim \frac{3.3 \times 10^4}{2\pi} \times \left(4 \times 1.3 \times 10^{-3} \times \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-1} \times 10^{-4}} \right)^{1/2} \approx 0.54 \times 10^4 \text{ Гц} = 5.4 \text{ кГц.}$$

Для крупных гранул размером порядка 1 см и при тех же пропорциях между геометрическими параметрами найдем $f_{\max} \sim 1.7$ кГц. Напомним, что эти частоты соответствуют волнам, длина которых равна двум пространственным периодам структуры. Соответствующие фазовые скорости распространения волн $c = 2df_{\max}$ будут порядка $c \sim 1.1 \times 10^3$ см/с и $c \sim 3.4 \times 10^3$ см/с. Следовательно, рассматриваемые волны – медленные; как видно из оценок, их скорость порядка десятков м/с, то есть гораздо меньше скорости звука как в воздухе, в воде, так и в плотных породах. Групповая скорость для предельных частот, как видно из (21), равна нулю.

Для низких частот фазовая и групповая скорости одинаковы и определяются формулой (22). Для рассмотренной выше “мелкозернистой” среды оценка дает:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{\rho_0 d^2 S}{\rho_1 l V_0}} \sim 3.3 \times 10^4 \times \left(1.3 \times 10^{-3} \times \frac{4 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-3}}{10^{-1} \times 10^{-4}} \right)^{1/2} \approx 3.4 \times 10^3 \text{ см/с.}$$

Для “крупнозернистой” среды получается та же оценка: $c \sim 3.4 \times 10^3$. Таким образом, во всем возможном диапазоне частот волны во влажной пористой среде являются медленными. К тому же, как показано выше, при низких частотах $f < f_{\min}$, то есть при

$$\beta a = a \sqrt{\pi f / v} \ll 1, \quad f < f_{\min} = \frac{\eta}{\pi a^2 \rho_1},$$

волна превращается в диффузионный колебательный процесс и практически не распространяется. Для рассмотренных выше двух сред и сдвиговой вязкости $\eta \sim 10^{-2}$ Пуаз имеем соответственно

$$f_{\min} \approx 130 \text{ Гц}, \quad f_{\min} \approx 1.3 \text{ Гц.}$$

Таким образом, влажная зернистая среда играет роль фильтра, пропускающего на заметные рас-

стояния волны определенных частот, лежащих в диапазоне $f_{\min} < f < f_{\max}$.

Наличие “доминантных” частот отмечено в экспериментах Вильчинской и теоретически – в работах Николаевского [3, 14]. Согласно этим данным, доминантные частоты составляют десятки Герц, что несколько меньше значений, следующих из представленной модели. Эти интересные вопросы, связанные с общей проблемой наличия разнообразных резонансов в геофизических системах [15–17], выходят за рамки настоящей статьи.

7. НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

Если длина волны велика по сравнению с размером гранул, можно в системе дифференциально-разностных уравнений (1) перейти к континуальному приближению, заменив разностные соотношения производными по продольной координате

$$p_{n-1} - p_n \approx -d \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \xi_{n+1} - \xi_n \approx d \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Система (1) при этом сведется к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^2 \partial t} - \varepsilon c^2 \frac{Sd}{V_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (30)$$

Здесь d – период цепочки, а эффективная скорость звука c дается выражением (22). Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля [8–10] и рассматривая только волну, бегущую примерно со скоростью c в положительном направлении оси x , получим уравнение эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon Sd}{c^2 V_0} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v}{2c} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (31)$$

Здесь, как и ранее, $\tau = t - x/c$, $u = \partial \xi / \partial \tau$ – колебательная скорость частиц в рассматриваемой структурно-неоднородной среде. Если в однородной сплошной среде перед нелинейным членом в эволюционном уравнении типа (31) присутствовал коэффициент ε/c_0^2 [8–10], то теперь его вид изменился. Отношение нового и старого коэффициентов $(c_0^2/c^2)(Sd/V_0)$ – большая величина. Это следует из оценок (см. раздел 6); они показали, что $c_0^2/c^2 \gg 1$. Таким образом, в поле медленных волн нелинейность проявляется заметно сильнее.

Для качественного анализа нелинейного искажения бегущей волны предположим, что поперечный профиль имеет вид, характерный для течения Пуазейля: $u \sim (1 - y^2/a^2)$. При этом из (31) для поля волны вблизи оси следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\delta u, \quad \alpha = \frac{\varepsilon Sd}{c^2 V_0}, \quad \delta = \frac{v}{2ca^2}. \quad (32)$$

Решение уравнения (32) для волны, исходная форма которой $u(x=0, t) = \Phi(t)$, имеет вид

$$ue^{\delta x} = \Phi \left[\tau + \frac{\alpha}{\delta} ue^{\delta x} (1 - e^{-\delta x}) \right]. \quad (33)$$

Характерная нелинейная длина – расстояние образования разрыва, как следует из решения (33), равна

$$x_{SH} = -\frac{1}{\delta} \ln \left(1 - \frac{\delta}{\alpha \omega u_0} \right). \quad (34)$$

Здесь ω , u_0 – характерные значения частоты и амплитуды исходного сигнала. Для малой вязкости жидкого слоя приближенно имеем

$$x_{SH} \approx \frac{1}{\alpha \omega u_0} \left(1 + \frac{\delta}{\alpha \omega u_0} \right) = \frac{c^2 V_0}{\varepsilon \omega u_0 S d} + \frac{v}{2ca^2} \left(\frac{c^2 V_0}{\varepsilon \omega u_0 S d} \right)^2. \quad (35)$$

Оценки для тех же параметров среды, что и в разделе 6, для частоты порядка 1 кГц и амплитуды колебаний частиц 10 см/с дают значение длины образования разрыва $x_{SH} \approx 10^2$ см. При этом оказывается, что оба члена в формуле (35) примерно одного порядка. Заметим, что аномально низкие скорости звука и большие нелинейности наблюдались в иных сильно сжимаемых средах – жидкостях с газовыми пузырьками (см. обзор [1] и цитированную в нем литературу).

Временную переменную τ в уравнении (31) удается исключить в случае сильно искаженных волн, которые содержат прямолинейные по τ участки профиля, разделенные ударными фронтами. Для таких участков положим в (31)

$$u = -\frac{\tau}{T} A(x, y). \quad (36)$$

Для “амплитуды” $A(x, y)$ получим уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\varepsilon S d}{c^2 V_0 T} A^2 = \frac{v}{2c} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}. \quad (37)$$

Четное по переменной y решение уравнения (37), удовлетворяющее граничным условиям $A(x, y = \pm a) = 0$, можно записать в виде ряда

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \cos \left[\frac{\pi}{2} (1 + 2n) \frac{y}{a} \right]. \quad (38)$$

Здесь функции $A_n(x)$ можно рассчитать численно либо приближенно аналитическими методами. Если интересоваться полем вблизи оси ($y = 0$) и ограничиться первым членом ряда (38), для функции $A_1(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dA_1}{dx} + \tilde{\varepsilon} A_1^2 = \tilde{v} A_1, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon S d}{c^2 V_0 T}, \quad \tilde{v} = \frac{\pi^2 v}{8ca^2}. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) с граничным условием $A_1(x=0) = u_0$ (задано исходное амплитудное значение колебательной скорости) имеет вид

$$A_1 = u_0 \frac{\exp(-\tilde{v}x)}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{v}} u_0 [1 - \exp(-\tilde{v}x)]}. \quad (40)$$

Решение (40) позволяет стандартным способом [18] сконструировать профиль как периодической пилообразной волны, так и одиночного N-образного импульса.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ колебаний и волн в среде, состоящей из твердых зерен и содержащей включения жидкости и газа. Показано, что сильная сжимаемость приводит к появлению “медленной” моды, скорость распространения которой гораздо меньше скорости звука в жидкости, материале твердых гранул и в газе. Найдено дисперсионное уравнение для дискретной цепочки резонаторов, моделирующей рассмотренную среду. Изучен нелинейный отклик отдельных резонаторов. Показано, что волны низких частот, для которых толщина акустического пограничного слоя больше, чем толщина жидкой пленки, в среде распространяться не могут. Волны более высоких частот распространяются, но существует частота отсечки, определяющая их максимально возможную частоту. В общем случае процессы описываются нелинейными интегро-дифференциальными и дифференциально-разностными уравнениями, которые могут быть проанализированы лишь численными методами. На основе решений упрощенных задач проведены численные оценки.

Работа поддержана грантами Президиума РАН, РФФИ и Президентским грантом Ведущих научных школ, а также Knowledge Foundation (KKS, Sweden).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физических наук. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. P. 168–186.
3. Nikolaevskii V.N. Geomechanics and Fluidodynamics. Cluver, Dodrecht, 1996.
4. Rudenko O.V., Hedberg C.M. Nonlinear dynamics of grains in a liquid-saturated soil // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 35. P. 187–200.
5. Rudenko O.V., Sobisevich L.Y., Sobisevich A.L. Nonlinear wave phenomena in a geophysical medium, containing resonant structures / EGS-2000. Nice. France. April 25–29, 2000.

6. *Rudenko O.V.* Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems (a review) // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
7. *Руденко О.В., Хирных К.Л.* Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
8. *Заикин А.А., Руденко О.В.* Нелинейная модель резонатора Гельмгольца с подвижной стенкой // *Акуст. журн.* 1996. Т. 42. № 3. С. 378–382.
9. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990.
10. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Plenum, Consultants Bureau, NY, 1977.
11. *Novikov B.K., Rudenko O.V., Timoshenko V.I.* Nonlinear Underwater Acoustics. Am. Inst. Phys., 1987.
12. *Руденко О.В., Сарвазян А.П.* Волновая биомеханика скелетной мышцы // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 6. С. 720–732.
13. *Лебедев-Степанов П.В., Руденко О.В.* О затухании звука в жидкости, содержащей взвешенные частицы микро- и нанометровых размеров // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 6. С. 706–711.
14. *Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н.* Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // *Физика Земли.* 1984. № 5. С. 91–100.
15. *Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л.* Волновые процессы и резонансы в геофизике. М.: ОИФЗ РАН, 2001. 297 с.
16. *Руденко О.В., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Хедберг К.М.* Об учете резонансных особенностей геологической среды (горной породы) в прикладных задачах нелинейной геомеханики и акустики / *Геофизика и математика: Материалы Второй все-русской конференции.* Пермь, 10–14 декабря 2001. С. 254–261.
17. *Собисевич А.Л., Руденко О.В.* О резонансных свойствах магматических структур // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. Приложение. С. 169–176.
18. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* Nonlinear Acoustics in Problems and Examples. Trafford, 2010.