АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 1, с. 36–40

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.21

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАССА И УПРУГОСТЬ

© 2012 г. Ю. И. Бобровницкий

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

101990 Москва, Малый Харитоньевский пер. 4

E-mail: yuri@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 14.08.11 г.

Введено понятие эквивалентных массы и упругости. Пояснен физический смысл их отрицательных значений и показано, что они не противоречат законам сохранения энергии и импульса. Выведены формулы для вычисления энергии эквивалентных массы и упругости. Сформулированы ограничения на характер их частотных зависимостей. В частности, отмечена невозможность существования отрицательных массы и упругости, не зависящих от частоты.

Ключевые слова: метаматериалы, дважды отрицательная среда, кинетическая энергия отрицательной массы, потенциальная энергия отрицательной упругости.

Последние годы в научной литературе все большее внимание уделяется акустическим метаматериалам, среди которых важное место занимают так называемые отрицательные среды, в которых плотность и сжимаемость принимают отрицательные значения. Эти среды обладают уникальными волновыми свойствами и позволяют решить ряд важных практических задач – см., напр., [1–3]. Однако ряд вопросов, касающихся отрицательных значений инерционно-жесткостных параметров, остается не вполне ясным. Соответствуют ли они основным законам физики, чему равна кинетическая энергия отрицательной массы и потенциальная энергия отрицательной упругости – эти и подобные вопросы не получили, насколько известно автору, надлежащего освещения в литературе. В данной статье они исследованы для простейших механических элементов – для сосредоточенных массы и упругости. Ниже для произвольной колебательной системы дано строгое определение эквивалентной массы (упругости), пояснен физический смысл их отрицательных значений и показано, что они не противоречат законам сохранения импульса и энергии. Основным результатом статьи является вывод формул, необходимых для вычисления энергетических характеристик отрицательных элементов. На основе этих формул сделан ряд выводов общего характера. Один из выводов, в частности, гласит: не существует изолированной отрицательной массы (упругости), постоянной в полосе частот.

Понятие отрицательной массы наглядно иллюстрирует рис. 1. Пусть имеется полый абсолютно жесткий шар массы m. Если на него подействовать внешней силой $f(t) = f\exp(-i\omega t)$ и измерить его ускорение $a(t) = a\exp(-i\omega t)$, то оно будет удовлетворять, очевидно, соотношению второго закона Ньютона

$$f = ma. \tag{1}$$

Если теперь поместить внутрь шара колебательный контур (m_1, k_1), как показано на рис. 1, и вновь подействовать на него той же силой и измерить его ускорение, то соотношение (1) перестанет быть верным. Простой расчет показывает, что в этом случае вместо (1) имеет место другое равенство $f = m_{eq}a$, где так называемая эквивалентная масса (строгое определение дано ниже) шара "с начинкой" равна

$$m_{eq} = \frac{f}{a} = m + \frac{m_1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}.$$

График этой функции частоты представлен на рис. 2. На низких частотах и в статике она равна

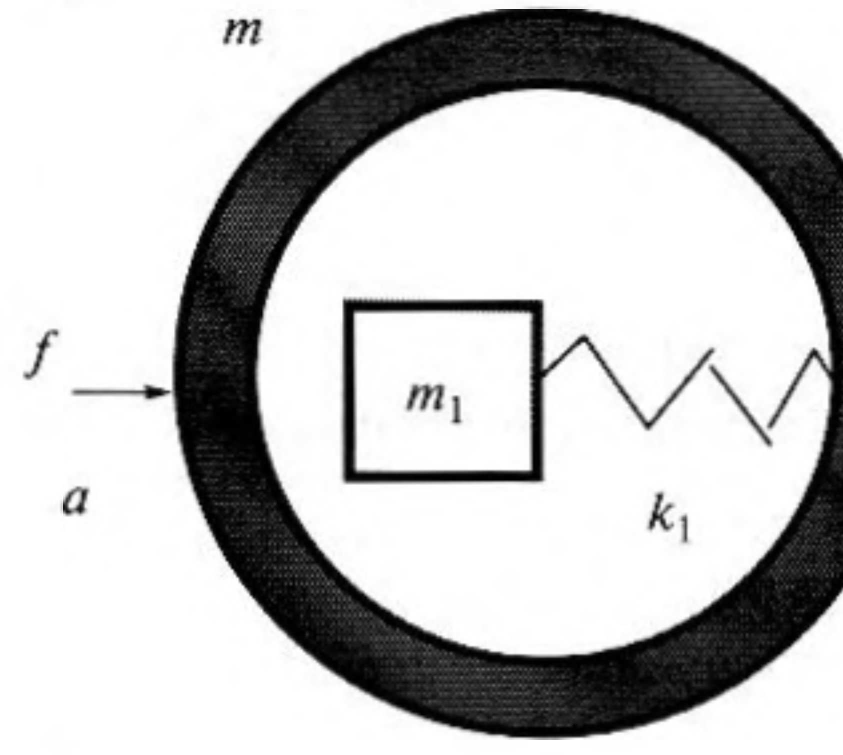

Рис. 1. Система с двумя степенями свободы, эквивалентная масса которой отрицательна в полосе частот.

сумме $m + m_1$, на частоте ω_1 она бесконечна (шар полностью заторможен внутренним динамическим гасителем), в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, где $\omega_2 = [k_1(1/m + 1/m_1)]^{1/2}$ – собственная частота двухмассовой системы, она *отрицательна* (на рис. 2 эта область отмечена пунктиром) и только на самых высоких частотах стремится к m. Этот пример показывает, что тело с твердой внешней оболочкой, но имеющее внутренние степени свободы, может демонстрировать реакцию на внешнее воздействие, сильно отличающуюся от реакции обычной сосредоточенной массы. Его эквивалентная масса, т.е. отношение амплитуды внешней силы к амплитуде ускорения отклика, может иметь любой знак и даже может быть бесконечной. Отрицательность же просто означает, что под влиянием колебаний скрытых внутренних степеней свободы тело ускоряется в противофазе с внешней силой. Отметим, что эквивалентную массу часто называют кажущейся или эффективной массой. Пример отрицательной массы на рис. 1 наиболее часто используется в литературе, но он далеко не единственный. Излагаемый ниже подход позволяет не только исследовать общие свойства отрицательных массы и упругости, но и облегчает их целенаправленное конструирование.

Пусть имеется произвольная линейная колебательная система, например, N-массовая система, которая совершает вынужденные колебания под действием внешней сосредоточенной силы $f(t)$, приложенной в одной точке или к одной из масс. Будем рассматривать отклик системы на это воздействие только в месте приложения силы. В этом случае будем говорить о колебательной *системе с одним входом* (one terminal system [4]). Она является аналогом электрического двухполюсника. Для гармонической во времени внешней силы $f(t) = f\exp(-i\omega t)$ отклик системы, например, скорость $v(t)$, также является гармонической функцией времени той же частоты, $v(t) = v\exp(-i\omega t)$, где комплексная амплитуда v является функцией частоты.

Две колебательные системы с одним входом назовем *эквивалентными*, если их отклики одинаковы. Каждому конкретному отклику соответствует целый класс эквивалентных колебательных систем с одним входом различной сложности. Естественно характеризовать этот класс одним из его простейших представителей. Так как сосредоточенная масса и сосредоточенная упругость (т.е. невесомая пружина с одним закрепленным концом) входят в каждый класс эквивалентных систем с одним входом, то их мы и примем в качестве основных представителей, моделирующих более сложные системы по отклику на входе. Они характеризуются одним параметром, в качестве которого, помимо скорости, можно использовать также амплитуду смещения u, амплитуду ускорения a, входной импеданс $z(\omega)$, эквивалентную массу m_{eq} и эквивалентную жесткость k_{eq}, определяемые как

$$z(\omega) = \frac{f}{v}, \quad m_{eq} = \frac{f}{a} = \frac{iz(\omega)}{\omega}, \qquad k_{eq} = \frac{f}{u} = -i\omega z(\omega), \tag{2}$$

или другую характеристику, линейно зависящую от отклика. Физический смысл эквивалентной массы (жесткости) данной колебательной системы с одним входом, следовательно, таков: это такая масса (упругость), реакция которой на внешнюю гармоническую силу совпадает с реакцией самой системы. Подчеркнем, что эквивалентные масса и упругость являются функциями частоты, причем эти функции тем сложнее, чем сложнее моделируемая система.

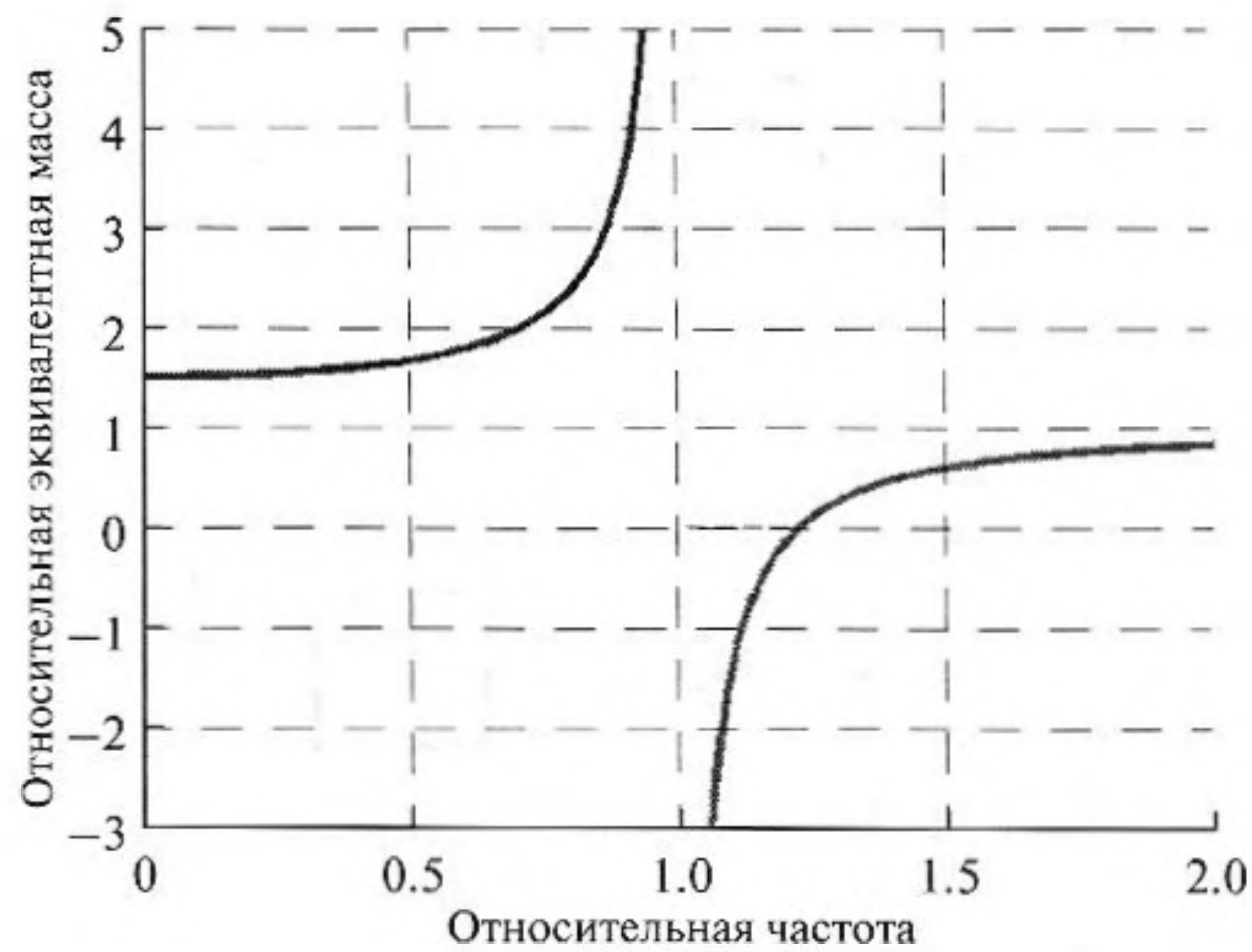

Рис. 2. Зависимость от частоты эквивалентной массы колебательной системы на рис. 1. Относительные частота и эквивалентная масса равны соответственно ω/ω_1 и m_{eq}/m. График построен для $m/m_1 = 2$.

Приведем некоторые простые примеры. Из определения (2) следует, что обычная пружина с постоянной (независящей от частоты) жесткостью k имеет такую же постоянную эквивалентную жесткость $k_{eq} = k$ и отрицательную эквивалентную массу $m_{eq} = -k/\omega^2$. Другими словами, реакция обычной пружины на всех частотах такая же, как у отрицательной массы, величина которой обратно пропорциональна квадрату частоты. Аналогично твердое тело с постоянной гравитационной массой m имеет такую же постоянную эквивалентную массу $m_{eq} = m$, но эквивалентная жесткость у нее отрицательна $k_{eq} = -m\omega^2$, причем также во всем частотном диапазоне. На рис. 3 приведены две простые колебательные системы, эквивалентные масса и жесткость которых отрицательны на низких или на высоких частотах. Меха-

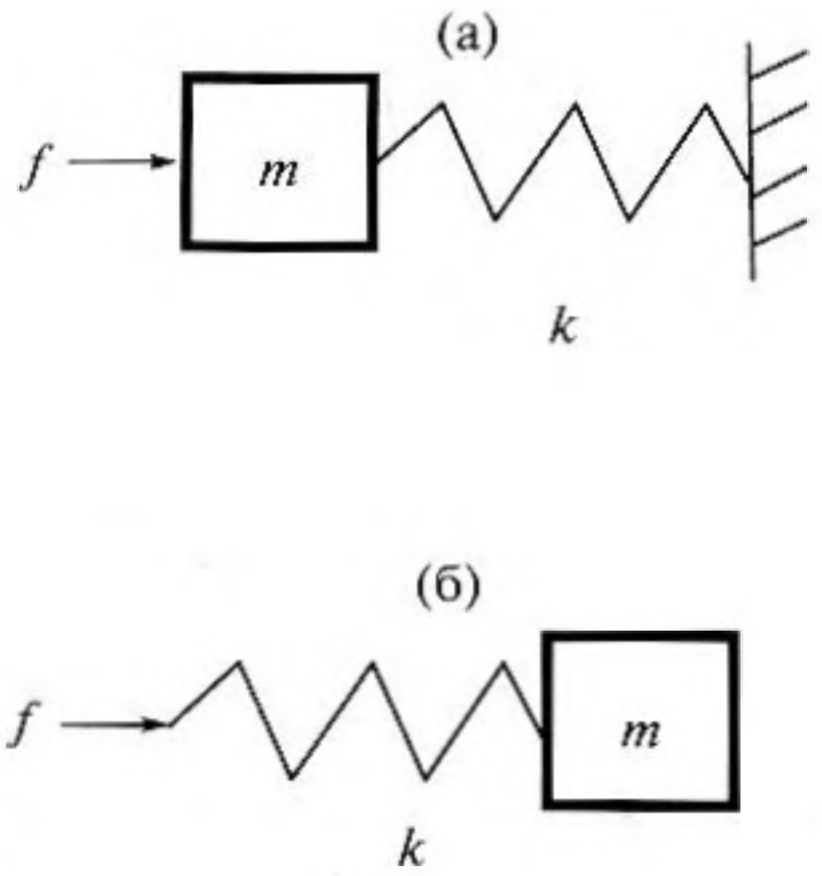

Рис. 3. Последовательный (а) и параллельный (б) механические колебательные контуры.

нический последовательный колебательный контур (рис. 3а) имеет следующие эквивалентные жесткость и массу

$$k_{eq} = k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad m_{eq} = m\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right). \tag{3a}$$

Эквивалентная жесткость принимает отрицательные значения выше собственной частоты $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$, а эквивалентная масса – ниже этой частоты. У параллельного колебательного контура (рис. 3б) эквивалентные параметры равны

$$k_{eq} = \frac{k}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}, \quad m_{eq} = \frac{m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{3b}$$

Здесь, наоборот, эквивалентная жесткость отрицательна ниже ω_0, а эквивалентная масса – выше ω_0. Двухмассовая система на рис. 1 имеет эквивалентную массу, отрицательную в полосе частот. Если к массе m_1 на рис. 1 прикрепить еще один параллельный колебательный контур (k_2, m_2), то эквивалентная масса будет иметь отрицательные значения в двух полосах частот. Подбирая нужным образом параметры достаточно сложной N-массовой системы с одним входом, можно сделать ее реакцию в заданном частотном диапазоне близкой к реакции эквивалентной массы или упругости с заданными значениями [4].

Рассмотрим теперь вопрос соответствия отрицательных значений эквивалентных массы и упругости основным физическим законам. Покажем сначала, что они не противоречат закону сохранения импульса. Рассмотрим изолированную N-массовую систему с одним входом (пусть входом является первая масса системы). Ее вынужденные колебания под действием силы $f_1(t)$ описываются системой следующих уравнений

$$\begin{aligned} &m_1 a_1 + k_{12}(u_1 - u_2) + \ldots + k_{1N}(u_1 - u_N) = f_1(t), \\ &m_2 a_2 + k_{21}(u_2 - u_1) + \ldots + k_{2N}(u_2 - u_N) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_N a_N + k_{N1}(u_N - u_1) + \ldots + k_{N,\,N-1}(u_N - u_{N-1}) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где матрица жесткостей симметрична в силу свойства взаимности, $k_{ij} = k_{ji}$. Складывая все уравнения и учитывая, что все внутренние силы взаимодействия между массами взаимно уничтожаются, получим $\sum_{j=1}^{N} m_j a_j = f_1(t)$ или, после интегрирования, $\sum_{j=1}^{N} m_j v_j = \int f dt$. Это и есть закон сохранения импульса (или количества движения) системы в классической формулировке [5]: импульс силы равен количеству движения системы. Для случая гармонической силы и на основании (2) имеем

$$f_1 = m_{eq} a_1 = \sum_{j=1}^{N} m_j a_j \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{N} m_j v_j = m_{eq} v_1.$$

Иначе говоря, количество движения системы равно количеству движения эквивалентной массы, так что закон сохранения импульса остается справедливым и при замене сложной линейной системы ее эквивалентной массой. Это относится и к отрицательным значениям эквивалентной массы. Если, например, импульс силы положителен, а скорость первой массы отрицательна, то эквивалентная масса должна быть отрицательной именно в силу закона сохранения количества движения (импульса).

Замена произвольной линейной системы с одним входом эквивалентной массой или эквивалентной упругостью законна и гарантированно дает правильные результаты во всех вычислениях, связанных с линейными преобразованиями отклика системы. Однако такая замена недопустима и приводит к ошибочным результатам, если отклик подвергается нелинейным преобразованиям, в частности, при вычислении энергии системы, которая является квадратичной функцией отклика. В этом случае рассматриваемую колебательную систему со многими степенями свободы и одним входом можно, аналогично вышеизложенному, смоделировать массой M_{eq} или пружиной с жесткостью K_{eq}, которые эквивалентны системе по энергетическому критерию. Другими словами, энергетически эквивалентная масса M_{eq} – это такая сосредоточенная масса, кинетическая энергия которой равна полной энергии моделируемой системы E_{tot}, а эквивалентная упругость – это такая сосредоточенная упругость, потенциальная энергия которой равна полной энергии системы. Для системы (4) это определение записывается как

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} m_j|v_j|^2 + \frac{1}{4}\sum_{i>j} k_{ij}|u_i - u_j|^2 \\ &= \frac{1}{4}M_{eq}|v_1|^2 = \frac{1}{4}K_{eq}|u_1|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что эквивалентные по энергии масса и упругость не совпадают с массой и упругостью, которые эквивалентны системе по линейному отклику. Это следует уже из того, что формально определенная кинетическая энергия отрицательной массы m_{eq} оказывается также отрицательной, что противоречит определению энергии. Между этими величинами, однако, имеют место простые соотношения

$$M_{eq} = m_{eq} + \omega\frac{\partial m_{eq}}{\partial\omega}, \quad K_{eq} = k_{eq} - \omega\frac{\partial k_{eq}}{\partial\omega}. \tag{6}$$

Вывод этих соотношений основан на следующем общем результате: средняя по времени полная энергия линейной колебательной системы без потерь, совершающая свободные или вынужденные гармонические колебания под действием внешней сосредоточенной силы, приложенной к одной из точек системы, может быть вычислена по данным, измеренным в одной этой точке:

$$E_{tot} = -\frac{1}{4i}|v|^2\frac{\partial z(\omega)}{\partial\omega}, \tag{7}$$

где $z(\omega)$ – это входной импеданс (2) и v – комплексная амплитуда скорости. Отметим, что для системы без потерь входной импеданс – чисто мнимая величина. Формула (7) была впервые опубликована в [6], строго доказана в [7] и экспериментально проверена в [8]. Соотношения (6) получаются приравниванием результатов применения формулы (7) к моделируемой системе и к ее эквивалентной массе или упругости (2). Соотношения (6) позволяют вычислять энергию системы с одним входом, оставаясь при этом в рамках линейной эквивалентности, т.е. используя массу m_{eq} и жесткость k_{eq}, эквивалентные по линейному отклику. Так как кинетическая энергия эквивалентной массы и потенциальная энергия эквивалентной упругости равна полной энергии моделируемой системы (5), то закон сохранения энергии, справедливый для системы, выполняется и для ее моделей, т.е. для эквивалентной массы и эквивалентной упругости, в том числе и когда значения m_{eq} и k_{eq} отрицательны. Непосредственным вычислением энергии нетрудно убедиться в справедливости соотношений (6) на всех частотах как для приведенных выше простых дискретных структур (3), так и для более сложных линейных систем без потерь, включая непрерывные упругие структуры.

Поскольку полная энергия колебательной системы всегда положительна, то положительными должны быть и энергетически эквивалентные масса M_{eq} и жесткость K_{eq}, даже в случае отрицательных m_{eq} и k_{eq}. Это накладывает определенные ограничения на отрицательные значения m_{eq} и k_{eq}. Укажем на наиболее важные из них.

(1) Не существует колебательных систем, отрицательная эквивалентная масса (или упругость) которых не зависит от частоты в каком-либо непрерывном диапазоне частот, даже в сколь угодно малом. Это утверждение следует из того факта, что для таких систем производная по частоте в соотношениях (6) равна нулю и энергетически эквивалентная масса (упругость) оказывается отрицательной, что, как мы видели, невозможно.

(2) Отрицательная эквивалентная масса (2) должна быть достаточно быстро возрастающей функцией частоты. Так, для часто встречающейся степенной зависимости $m_{eq} = -|a|\omega^{\alpha}$ показатель степени должен удовлетворять неравенству $\alpha < -1$.

(3) Отрицательная эквивалентная жесткость (2) должна быть достаточно быстро убывающей функцией частоты. Для степенной зависимости вида $k_{eq} = -|b|\omega^{\beta}$ показатель степени должен удовлетворять неравенству $\beta > 1$.

Подведем итог изложенному. В статье введено понятие эквивалентности линейных колебательных систем с одним входом и показано, что любая такая система может быть заменена (смоделирована) эквивалентной сосредоточенной массой или упругостью, если отклик системы подвергается только линейным преобразованиям. Наибольшее внимание уделено отрицательным значениям эквивалентной массы (упругости). Показано, что они не противоречат законам сохранения энергии и импульса. Выведены формулы, связывающие среднюю по времени полную энергию моделируемой системы с ее эквивалентной массой и упругостью. Сформулирован ряд ограничений для отрицательных значений эквивалентных массы и упругости, которые заметно сужают область их возможных реализаций. В дальнейших публикациях автор предполагает распространить полученные результаты на распределенные системы, в частности, на отрицательные периодические структуры и среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pendry J.B., Li J.* An acoustic metafluid: realizing a broadband acoustic cloak // New Journal of Physics. 2008. V. 10. 115032.
2. *Li J., Fung K.H., Liu Z.Y., Ping Sheng, Chan C.T.* Generalizing the concept of negative medium to acoustic waves / Physics of negative refraction and negative index materials. Springer series in material science. 2007. V. 98. Ch. 8. P. 183–215.
3. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические дважды отрицательные среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
4. *Milton G.W., Seppecher P.* Realizable response matrices of multiterminal electrical, acoustic, and elastodynamic networks at a given frequency // Proceedings of the Royal Society of London. 2008. V. A464. P. 967–986.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1958. 206 с.
6. *Bobrovnitskii Yu.I.* Energy relations for acousto-structural waveguides // Proc. 13th Intern. Congress on Acoustics. Belgrade, Yugoslavia. 1989. V. 3. P. 389–392.
7. *Бобровницкий Ю.И.* Новый метод оценки энергетических характеристик колеблющейся упругой конструкции // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 301–312.
8. *Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П.* Развитие и экспериментальная проверка импедансного метода оценки энергетических характеристик колеблющейся упругой конструкции по ее входному импедансу // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 748–755.