АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 1, с. 41–48

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 517.958, 534.21

О ДИСПЕРСИОННЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗГРАНИЧНЫХ СРЕД, НЕ ОБЛАДАЮЩИХ ПОГЛОЩЕНИЕМ И ДИСПЕРСИЕЙ

© 2012 г. Ю. Н. Маков*, **

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет*
119999 Москва, Ленинские горы. Тел.: (495) 939-2943
***Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН*
E-mail: yuri_makov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.11 г.

Обсуждается и обосновывается существование неодномерных бездисперсионных и дисперсионных решений "классического" линейного волнового уравнения. Сформированы процедуры нахождения этих двух классов решений и представлены примеры их использования.

Ключевые слова: линейное волновое уравнение, дисперсионные и бездисперсионные решения, относительно неискажающиеся волны, форма волны, фазовая функция.

Уже более полувека одним из приоритетов развития многих разделов науки является использование теории нелинейных процессов с соответствующим математическим аппаратом (модельные нелинейные уравнения, методы их решения). Всеобщий интерес к "нелинейной науке", возможно, затенил "прорыв" в математической физике, связанный с нахождением новых решений "классического" линейного волнового уравнения. Ценность этой деятельности, начатой в 1980-х годах и продолжающейся вплоть до настоящего времени, определяется не только математическим аспектом в виде открытия новых возможностей в решении давно известного уравнения, но и физическим содержанием. Эти решения имеют локализованную структуру, что соответствует либо пучкам (для них традиционно использовался лишь "аналог" волнового уравнения в параболическом приближении), либо более сложным по геометрии пространственным объектам. Особое внимание отводится пучковым решениям с пониженной степенью дифракционной расходимости (теоретически – с нулевой расходимостью). Мы не будем давать обзор или классификацию новых решений волнового уравнения, а лишь сошлемся на имеющиеся статьи обзорного характера [1, 2].

Появление данной работы обусловлено не столько возможностью пополнить набор "полезных" решений линейного волнового уравнения, сколько демонстрацией необходимости активного использования всех аспектов понятия "дисперсия" в отношении этого уравнения. С этой целью обсуждаются причины и условия проявления дисперсии в решениях волнового уравнения и дается математическое "обеспечение" для поиска таких решений.

Итак, в центре внимания будет классическое линейное волновое уравнение

$$\ddot{u}-c^2\,\Delta u=0, \qquad (1)$$

которое без характерных дополнительных слагаемых соответствует бездисперсионной и бездиссипативной среде. Как известно, эти свойства связаны между собой соотношениями Крамерса–Кронига. Напомним, что простейшее решение в виде плоской гармонической волны является "тестовым", при подстановке которого в линейное уравнение любого (общего) вида "проявляются" дисперсионные свойства в виде зависимости волнового вектора от частоты $\vec{k}(\omega)$. Эти дисперсионные свойства имеют физическую основу в виде резонансных, релаксационных и других внутренних процессов в среде, в которой распространяется волна. Модельное представление "внутренних" свойств среды отражается дополнительными (отсутствующими в уравнении (1)) слагаемыми. Будучи найденным в результате указанной математической процедуры, это физически обусловленное дисперсионное соотношение $\vec{k}(\omega)$ при его подстановке в анзац плоской гармонической волны

$$u=Ae^{-i\omega t+i\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}}, \qquad (2)$$

или волновой структуры, сформированной из таких волн

$$u(\vec{r},t)=\int\tilde{F}(\omega)e^{-i\omega t+i\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}}d\omega, \qquad (3)$$

"делает" эти представления (2) и (3) решением исходного волнового уравнения (из которого получено дисперсионное соотношение). Таким образом, дисперсионное свойство среды переносится на само решение (2), (3). Так, линейная зависимость от частоты $k(\omega)=|\vec{k}|=\omega/c$ соответствует среде без дисперсии, важным индикатором чего является следуемая из (3) зависимость этой волновой структуры от одной "бегущей" координаты

$$u(x,y,z,t)=F(t-\xi(x,y,z)/c), \qquad (4)$$

где ξ – координата вдоль направления распространения волны, определяемая равенством $k\xi = \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Вид волны (4) показывает неизменность ее формы (при любой функции F) в процессе ее движении в бездисперсионной по своим физическим свойствам среде, т.е. решения (2) или (3), как и среда, также будут бездисперсионными. При наличии дисперсии среды и соответствующего волнового уравнения (с дополнительными слагаемыми по сравнению с (1)) его решение также в виде (3) показывает изменяемость $u(\vec{r},t)$ в процессе распространения (за счет разных скоростей распространения гармонических составляющих под интегралом). Вместе с тем, плоскую гармоническую волну (2) с найденным дисперсионным соотношением $\vec{k}(\omega)$ можно трактовать как одномерную волновую структуру данного определенного (единственного) вида, которая распространяется без трансформации при наличии дисперсии. Из сказанного следует: в случае одномерных волн для решений вида (2), (3) имеется однозначное соответствие "бездисперсионные/дисперсионные среда и соответствующее волновое уравнение $\Leftrightarrow$ бездисперсионное/дисперсионное решение данного уравнения". Зачастую факт распространимости этого прямого соответствия только на решения вида (2), (3) "стирается из памяти" и, например, для волнового уравнения (1) формируется неправильное представление о том, что все его решения являются бездисперсионными. Однако для более сложных структур, нежели одномерные волны, начиная с пучков, их дисперсионные свойства определяются не только физическими факторами ("внутренними" свойствами среды), но и геометрией (топологией) самой волновой структуры (ее пространственным профилем, топологий фазового фронта, законами их пространственного и временного изменения)[1]. Изучение этого феномена в отношении дисперсии сложных неодномерных волновых решений бездисперсионного уравнения (1) ранее не проводилось.

Аналогом обсуждаемого эффекта является проявление дисперсии за счет дифракции в волновых пучках, распространяющихся в среде без дисперсии (см. упоминание в [4] и более развернутое рассуждение в [5]). Позднее в ряде работ (например, см. [6]) рассматривались методы измерения этого эффекта. Заметим, однако, что эффект дисперсии в волновых пучках, обсуждавшийся в упомянутых работах, описывается, как и сами пучки, параболическим уравнением дифракции (а не волновым уравнением (1)); в этих работах поставленные нами задачи не решаются.

Перейдем к описанию методов нахождения бездисперсионных и (что самое интересное) дисперсионных решений волнового уравнения (1); при этом будет указана специфика алгоритмов для целенаправленного получения решений того или другого класса.

Далее будем использовать введенное в монографиях [7, 8] представление решений уравнения (1) в виде "относительно (т.е. почти) неискажающихся волн"

$$u=g(x_1,x_2,x_3,ct)W(S(x_1,x_2,x_3,ct)). \qquad (5)$$

Здесь S – фазовая функция, которая в каждый момент времени $\tilde{t}$ определяет конкретную поверхность $S(x_1,x_2,x_3,c\tilde{t})$ = const, на которой форма волны W имеет одно и то же значение; "амплитудная" функция $g(x_1,x_2,x_3,ct)$ описывает "масштабные" изменения формы волны W при сохранении характерного вида этой формы; здесь и далее множитель c (тот же, что и в уравнении (1)) перед аргументом t введен для удобства. При $g\equiv 1$ волна будет полностью "неискажающейся" [7, 8]. Ясно, что в представлении (5) как решении уравнения (1), все три элемента W, S, g связаны между собой, причем эта связь может быть принципиально разной. Для рассмотрения этого вопроса подставим (5) в уравнение (1) и после группировки слагаемых получим:

$$\begin{gathered} g\left[(\nabla S)^2-\dot{S}^2\right]W''+ \\ +\left[2(\nabla g\cdot\nabla S-\dot{g}\cdot\dot{S})+g(\Delta S-\ddot{S})\right]W'+[\Delta g-\ddot{g}]W=0, \end{gathered} \qquad (6)$$

[1] Отметим еще один хорошо известный и изученный "не физический" фактор, порождающий дисперсию – это наличие границ в системе распространения волны (в частности, распространение в волноводах, вдоль поверхности раздела сред и т.п.). За этим фактором закрепилось название "геометрическая дисперсия" (см. [3]).

где точками обозначены производные по аргументу ct; W',W'' – это производные по полному аргументу этой функции; ∇, Δ – операторы градиента и Лапласа соответственно. Заметим, что выражение во второй квадратной скобке эквивалентно следующему: $g^{-1}\left[\operatorname{div}\left(g^2\cdot\nabla S\right)-\left(g^2\cdot\dot{S}\right)'_{ct}\right]$.

Фазовая и "амплитудная" функции S, g могут иметь более конкретный (частный) вид, что несколько видоизменит выражения в квадратных скобках в (6).

Уравнение (6) может решаться на основе двух разных подходов, дающих два класса решений уравнения (1) с разным физическим содержанием. В первом случае, при отыскании решения (6) можно полагать, что это уравнение должно удовлетворяться для произвольной функции W, т.е. решения будут описывать волновые структуры с произвольной формой. Уравнение (6) при данном условии будет удовлетворено, если все выражения в квадратных скобках, играющих роль коэффициентов при W и ее производных, будут равны нулю, что приводит к следующей систему уравнений:

$$(\nabla S)^2-\dot{S}^2=0, \tag{7а}$$

$$2\left(\nabla g\cdot\nabla S-\dot{g}\cdot\dot{S}\right)+g\cdot\left(\Delta S-\ddot{S}\right)=0, \tag{7б}$$

$$\Delta g-\ddot{g}=0. \tag{7в}$$

Если с помощью пространственных и временных производных от фазовой функции S определить "локальные" волновой вектор и частоту

$$\vec{k}=\nabla S,\qquad \omega=\dot{S}_t, \tag{8}$$

то уравнение (7а) соответствует линейной связи $\omega=\pm c\left|\vec{k}\right|$ (напомним, что в уравнении (7а) временная производная берется по переменной ct).

Таким образом, два отличительных свойства полученных этим первым способом решений (а именно, независимость решений от конкретной формы волны W и линейная связь для них в силу (7а) между введенной согласно (8) частотой и модулем волнового вектора), дают основание относить их к классу *бездисперсионных* решений волнового уравнения (1).

Отметим, что в книгах [7, 8], где введено понятие "относительно неискажающейся волны", для такого представления волн обсуждаются именно бездисперсионные решения волнового уравнения. Там же отмечается, что авторам известно только два решения этого типа – плоские и сферические волны (для первых $g=1$, $S=ik\left(\vec{k}_0\cdot\vec{r}-ct\right)$, для вторых $g=\left|\vec{r}\right|^{-1}$, $S=ik\left(\left|\vec{r}\right|-ct\right)$; $\vec{k}_0$ – безразмерный единичный вектор вдоль волнового вектора, величина которого k, $\vec{r}$ – радиус-вектор; легко проверяется, что эти пары выражений удовлетворяют системе уравнений (7)).

Начиная с 1980-х годов, развернулась активная деятельность по нахождению новых решений уравнения (1) именно из класса бездисперсионных решений (см. [9, 10]), что было естественным при бездисперсионности самого данного уравнения. Следует иметь в виду, что эти новые результаты получены фактически не решением соответствующей системы уравнений (7), а путем преобразований уже известных решений на основе свойств симметрии и самоподобия исходного волнового уравнения и уравнений системы (7). С одной стороны, многочисленные результаты этой процедуры оказываются плодотворными (получены разные виды локализованных волновых структур), а с другой стороны это демонстрирует, что до настоящего времени не разработаны какие-либо методы прямого аналитического решения системы (7), которая "нетривиальна" в силу ее нелинейности и переопределенности (три уравнения для двух функций).

Не перечисляя даже основные результаты этой деятельности, приведем для примера только одно "знаменитое" бездисперсионное решение волнового уравнения. Еще в начале прошлого века Г. Бейтмен (H. Bateman) с помощью подходящего инвариантного преобразования координат нашел [11] следующее точное решение волнового уравнения (1):

$$u=(z\pm ct)^{-1}W\left(z\mp ct+\frac{x^2+y^2}{z\pm ct}\right), \tag{9}$$

здесь $g=(z\pm ct)^{-1}$, $S=\alpha\left(z\mp ct+\dfrac{x^2+y^2}{z\pm ct}\right)\equiv\alpha\times$ $\times\dfrac{r^2-(ct)^2}{z\pm ct}$, $r^2=x^2+y^2+z^2$, α – "обезразмеривающий" множитель; легко проверить, что функции g и S удовлетворяют системе уравнений (7), хотя Бейтманом они найдены не из этой системы.

Решение (9) полностью соответствует анзацу "относительно неискажающихся волн" (5), введенному Курантом и Гильбертом, хотя оно и не фигурирует в их книгах [7, 8] (как уже говорилось, им были известны только решения в виде плоской и сферической волны, отвечающие относительно неискажающемуся анзацу (5)).

Независимость решения (9) от вида функции W и подчинение S уравнению (7а), из которого следует линейная связь между введенными согласно (8) частотой и модулем волнового вектора, определяют решение (9) и все другие решения, получающиеся из него инвариантными преобразованиями, как *бездисперсионные*.

Для применения решения (9) к описанию физически значимых волновых структур несколько десятилетий спустя в работах [9, 10] был применен способ "комплексификации" этого решения. Используя то обстоятельство, что добавление в знаменатель выражений g и S произвольной константы сохраняет (9) решением волнового уравнения и полагая эту константу мнимой (например ih) при конкретизации функции W в виде экспоненты, получено решение, традиционно называемое фокусированной волновой модой (FWM – focus wave mode) в виде:

$$u = U_-(x, y, z-ct)\,U_+(z+ct), \tag{10}$$

где

$$U_- = \frac{u_0 \exp\left(-k\rho^2 \dfrac{h}{Z_-^2}\right)}{\sqrt{Z_-^2}} \exp\left[ik\left(\rho^2 \frac{z-ct}{Z_-^2} + \Phi\right)\right],$$

$$U_+ = \exp[ik(z+ct)],$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad Z_-^2 = (z-ct)^2 + h^2,$$

$$\Phi = k^{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{z-ct}{h}\right).$$

Решение (10) волнового уравнения соответствует распространяющемуся вдоль положительного направления оси z локализованному с гауссовым распределением по поперечным координатам фокусированному негармоническому волновому пучку с несферическим (непараболическим) фазовым фронтом, модулируемому проходящей в отрицательном по z направлении плоской гармонической волной. Подчеркнем еще раз, что при всей своей структурной сложности решение (9) и его конкретизированный вариант (10) являются бездисперсионными решениями (что совершенно не очевидно). Решения (9) и (10) во многих работах разными способами трансформировались, давая описание новых локализованных волновых структур [9, 10].

После обсуждения основных особенностей первого возможного способа решения уравнения (6) для нахождения "относительно неискажающихся" решений (5) волнового уравнения (1) и подтверждения бездисперсионного характера решений, получаемых этим первым, фактически идущим от Куранта и Гильберта [7, 8] способом, перейдем к рассмотрению еще одной возможности нахождения решений уравнения (6). Сразу отметим, что представляемый здесь второй способ решения не использовался в работах по нахождению "относительно неискажающихся" решений волнового уравнения (т.е. "не нарушалась традиция", идущая от Куранта и Гильберта [7, 8]; другая причина этого определится чуть ниже).

Итак, второй способ решения уравнения (6) довольно очевиден: не использовать условие произвольности функции W и ее производных, а находить эту функцию наряду с g и S. При отказе от условия произвольности W и ее производных выражения в квадратных скобках в уравнении (6) не должны приравниваться нулю (в частном случае равенство нулю допускается не более чем для одного из трех этих выражений). Это дает вместо (7) следующую систему дифференциальных уравнений с правой частью (удобно предварительно "избавиться" в (6) от множителя g в первом слагаемом этого уравнения, поделив на этот не равный нулю множитель каждое слагаемое уравнения):

$$(\nabla S)^2 - \dot{S}^2 = f_1, \tag{11а}$$

$$2g^{-1}\left(\nabla g \cdot \nabla S - \dot{g} \cdot \dot{S}\right) + \left(\Delta S - \ddot{S}\right) = f_2, \tag{11б}$$

$$g^{-1}\left(\Delta g - \ddot{g}\right) = f_3. \tag{11в}$$

Уравнения (11) можно рассматривать как замену выражений в квадратных скобках в (6) на f_i, тогда для "решаемости" уравнения (6) относительно $W(S)$ f_i должны быть либо функциями от S, либо постоянными. Таким образом, для второго способа нужно "удачным" образом задать в (11) правые части в виде функций от S или постоянных (эта кажущаяся произвольность в описываемой процедуре реально сильно ограничена возможным выбором f_i в (11), см. далее). Затем нужно найти из нелинейной и переопределенной системы (11) решения для g и S. На последнем этапе нужно найти W, решив (6) при подстановке в него выбранных "коэффициентов" f_i. Из описания процедуры следует вывод: отсутствие произвола в выборе формы волны W (форма "жестко" определяется "амплитудной" функцией g и фазовой функцией S), а также отсутствие линейной связи между локальной частотой и модулем волнового вектора из-за уравнения (11а) с ненулевой правой частью вместо уравнения (7а) в предыдущем случае, где была линейная зависимость между частотой и волновым вектором (см. (8) и далее), являются явными и достаточными признаками дисперсии. Отметим, что нахождение конкретного вида формы волны W в общем (не одномерном) случае эквивалентно конкретной форме плоской гармонической волны (2) в одномерном случае как единственной форме одномерной волны, распространяющейся без искажения при наличии дисперсии.

Таким образом, рассматриваемый второй способ решения уравнения (6) и, соответственно, исходного "классического" волнового уравнения (1) дает *дисперсионные решения* этого волнового уравнения (если такие решения найдутся). Следует особо подчеркнуть, что во всех работах по поиску бездисперсионных решений не говорится об альтернативной возможности поиска дисперсионных решений волнового уравнения. Для этого, по нашему мнению, есть две взаимосвязанные причины: это традиции классических монографий [7, 8] (хотя там говорится о дисперсии решений изначально "дисперсионных" уравнений), а также уже упоминавшееся "довлеющее" представление (основанное на оперировании с плоскими гармоническими волнами), что "классическое" волновое уравнение может иметь только бездисперсионные решения. На этом общем фоне следует упомянуть всего одну книгу [12], появившуюся (1964 г.) задолго до вновь проявленного большого интереса к решениям волнового уравнения, в которой отмечается возможность и бездисперсионных, и дисперсионных решений на основе произвольности или жесткой зависимости от "амплитудной" и фазовой функций формы волны, однако какие-либо процедуры нахождения решений обоих классов там отсутствуют.

Итак, рассмотрим конкретные примеры нахождения дисперсионных решений "классического" волнового уравнения (1).

Пример 1. Будем искать решение в виде абсолютно неискажающихся волн, т.е. с $g\equiv 1$ в (5). В этом случае в системе уравнений (11) останутся только два первых "укороченных уравнения"; при выборе правых частей уравнений системы (11) в виде функций от S будем иметь следующую систему уравнений:

$$(\nabla S)^2-\dot{S}^2=f_1(S), \quad (12а)$$

$$\Delta S-\ddot{S}=f_2(S), \quad (12б)$$

которая, несмотря на компактность, трудна для решения. Это два разных нелинейных уравнения для определения одной функции. Большим подспорьем при рассмотрении этой проблемы является серия математических работ Фущича В.И. с соавторами [13, 14], где анализируется подобная система с доказательством ряда полезных для наших целей теорем. Одна из них утверждает (см. [13]), что система (12) совместна только при условии: либо а) $f_1(S) = f_2(S) = 0$, либо б) $-f_1(S) = \left[q'_S(S)\right]^{-2}$, $-f_2(S) = N\left[q'_S(S)\cdot(q-\tilde{C})\right]^{-1} - q''_{S,S}(S)\cdot\left[q'_S(S)\right]^{-3}$, где $q(S)$ –произвольная дважды дифференцируемая функция, первая производная которой не равна тождественно нулю, $\tilde{C}$ – произвольная постоянная, а N может принимать одно из значений $N = 0, 1, 2, 3$. Знак "минус" перед f_i отражает тот факт, что в [13] рассматривается система уравнений, аналогичная (12), но с обратным порядком следования операторов в левых частях уравнений системы.

В силу произвольности функции $q(S)$ в вышеприведенной теореме выберем ее такой, чтобы $-f_1(S) = \left[q'_S(S)\right]^{-2} \equiv 1$; это определяет $q(S) = \pm(S+a)$, a – const, а также $-f_2(S) = N(S+C)^{-1}$, где $C = a - \tilde{C}$ – const, N принимает одно из значений $N = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, необходимо найти решения переопределенной системы (12) с только что конкретизированными функциями:

$$-f_1(S)=1, \quad -f_2(S)=N(S+C)^{-1}, \quad (N=0,1,2,3). \quad (13)$$

В виде теорем эти решения (не как частные, а как общие) также найдены в [14] и выглядят они следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{при } N=0, \quad S=ct+C_0,\\ &\text{при } N=1, \quad (S+C)^2=(ct+C_0)^2-(x+C_1)^2,\\ &\text{при } N=2, \quad (S+C)^2=(ct+C_0)^2-(x+C_1)^2-(y+C_2)^2,\\ &\text{при } N=3, \quad (S+C)^2=(ct+C_0)^2-(x+C_1)^2-(y+C_2)^2-(z+C_3)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

На этом решение задачи не завершается. Необходимо теперь найти вид функции W. Подставляя в уравнение (6) вместо выражений в первых двух квадратных скобках функции f_1, f_2 из (13) и помня, что $g = 1$, имеем

$$W''+N(S+C)^{-1}W'=0,$$

откуда

$$W=\frac{A}{1-N}\frac{1}{(S+C)^{N-1}}+B \quad (15)$$

(A, B, C – произвольные постоянные). Рассматривая (15) в совокупности с (14), делаем следующие выводы:

а) случай с $N = 0$, когда $W = ct + C$, является вырожденным (в отсутствие пространственных переменных), поскольку фиксирует лишь возможность временного сдвига,

б) случай с $N = 1$, как видно из (15), исключается; причина этого ясна, поскольку волновое уравнение (1) в одномерном случае имеет хорошо известное общее решение в виде произвольных функций от бегущих координат и это решение бездисперсионное,

в) случай с $N = 2$, соответствующий двумерной задаче, дает (см. (15) и (14))

$$W=\frac{W_0}{\sqrt{(ct+C_0)^2-(x+C_1)^2-(y+C_2)^2}}+B; \quad (16)$$

в этом двумерном случае получилось решение (напомним, что оно найдено как дисперсионное решение), которое входит (при $B = 0$) в качестве функции единичного импульса в хорошо известные интегральные формулы (см., например, [15]) для выражения цилиндрической волны, проходящей через рассматриваемую точку, при заданной области с начальными (по времени) условиями, либо при заданном источнике излучения. Значит, из этого следует дисперсионный характер (что ранее не отмечалось в литературе) цилиндрических волн, удовлетворяющих (1) с локализованной пространственной областью начальных условий или с внешним источником излучения. Отмечаемая здесь дисперсионность цилиндрических волн как решений (1) также подтверждается обсуждаемым во всех учебниках (см. [12, 15]) эффектом расплывания изначально локализованного в пространстве возмущения (заданного как начальное условие) при его распространении в виде цилиндрической волны,

г) в случае с $N = 3$ (трехмерный случай) из (15) и (14) получаем

$$W=\frac{W_0}{(ct+C_0)^2-(x+C_1)^2-(y+C_2)^2-(z+C_3)^2}+B. \qquad (17)$$

Математически это решение здесь найдено как дисперсионное (в отличие от бездисперсионного решения для распространения "классической" сферической волны); при мнимом значении C_0 и представлении решения в виде двух слагаемых (при $B = 0$) возможна интерпретация этого решения (см. [16]) как описание распространения двух сферических импульсных волн, одна из которых расходится, а другая сходится (коллапсирует), меняя свою форму с двуполярной на однополярную.

Пример 2. Рассмотрим процедуру нахождения дисперсионного решения для привычной пучковой структуры с локализацией по поперечным координатам x, y при аксиальной симметрии и распространении вдоль оси z. Для этой задачи конкретизируем вид "амплитудной" функции как $g=g(\alpha\rho)$ и фазовой функции как $S(z,ct)=\beta z-ct$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, α, β – постоянные. При таком выборе функций левая часть уравнения (11б) тождественно равна нулю; полагая (в силу возможности выбора по самой процедуре решения) правую часть этого уравнения также равной нулю, исключаем его из рассмотрения, как выполняющееся тождественно. Первое уравнение (11а), если его правую часть выбрать в виде постоянной $-\gamma^2$, дает следующее соотношение:

$$\beta^2-1=-\gamma^2. \qquad (18)$$

Третье уравнение (11в) для $g=g(\alpha\rho)$ при выборе его правой части в виде постоянной $-\alpha^2$ принимает вид $\Delta_\rho\, g(\alpha\rho)+\alpha^2 g(\alpha\rho)=0$ и определяет функцию g как функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка, т.е.

$$g=AJ_0(\alpha\rho). \qquad (19)$$

Выбранные для решения правые части уравнений системы (11) приводят (6) к виду:

$$\gamma^2W''_{SS}+\alpha^2W=0, \quad S=\beta z-ct,$$

что дает решение

$$W=\tilde{B}\exp\left[i\frac{\alpha}{\gamma}(\beta z-ct)\right]+\tilde{C}\exp\left[-i\frac{\alpha}{\gamma}(\beta z-ct)\right]. \qquad (20)$$

Определим постоянные α, β, γ по их "физическому" смыслу и размерности (или безразмерности) в выражениях (18)–(20) через соответствующие компоненты волнового вектора:

$$\alpha=k_\rho, \quad \beta=k_z/k, \quad \gamma=k_\rho/k, \qquad (21)$$

что с учетом (18) дает $k^2=k_\rho^2+k_z^2$. Тогда решение (20) с использованием (19)–(21) будет иметь вид

$$\begin{gathered} u=gW=J_0(k_\rho\rho)\times \\ \times\{B\exp[i(k_zz-kct)]+C\exp[-i(k_zz-kct)]\}, \end{gathered} \qquad (22)$$

причем $\omega=kc=c\sqrt{k_\rho^2+k_z^2}$.

Решение (22) представляет собой известную "бездифракционную" структуру под названием "пучок Бесселя". В данном случае этим примером мы показали, что пучки Бесселя – это дисперсионная структура. Форма распространяющейся волны в виде гармонической волны в (22) – это единственно возможная форма волны в отличие, например, от бездисперсионного решения (9), (10), где форма волны произвольна. Также на дисперсионный характер бесселевых пучков указывает различие в фазовой и групповой скорости распространения. Действительно, поскольку эта волновая структура распространяется (в целом) вдоль оси z, с компонентой k_z полного волнового вектора, то это движение будут характеризоваться z-компонентой фазовой и групповой скорости:

$$(v_\text{ф})_z=\frac{\omega}{k_z}=\frac{\omega}{k}\frac{k}{k_z}=c\frac{k}{k_z}, \qquad (v_\text{гр})_z=\frac{\partial\omega}{\partial k_z}=c\frac{k_z}{k}. \qquad (23)$$

Выявленная здесь "дисперсионность" бесселевых пучков существенна потому, что, начиная с первых работ [17], эти структуры получены не в результате "регулярного" решения соответствующих уравнений (наподобие проделанной здесь процедуры), а путем удовлетворения условию "бездифракционности" некоторой общей спектральной композицией, которая при подстановке в (1) дает обсуждаемое здесь решение. Пучок Бесселя и другие структуры, полученные на основе его решения, всегда обсуждались как бездифракционные решения и никогда не характеризовались как дисперсионные/бездисперсионные. Однако это представляется важным, поскольку для дисперсионных структур любое незначительное нарушение конкретно определенной единственно возможной формы волны ведет к дальнейшему разрушению этой структуры (в отличие от бездисперсионных структур, которые "безразличны" к форме структуры). Это приводит к выводу о неустойчивости/устойчивости дисперсионных/бездисперсионных структур.

После обсуждения возможности нахождения двух классов решений (бездисперсионных и дисперсионных) классического волнового уравнения (1) и демонстрации конкретных примеров этого, подведем итоги:

1. Рассмотренные процедуры нахождения двух указанных классов решений (бездисперсионных и дисперсионных) для волнового уравнения (1) могут в своей основе быть использованы и для других уравнений, а также для тестирования на "дисперсионность/бездисперсионность" решений, найденных каким-либо другим путем (большинство решений находятся именно "непрямыми" способами). Как отмечено выше, такое тестирование представляет интерес в связи с возможной устойчивостью/неустойчивостью формы бездисперсионных/дисперсионных решений (и их реальных физических аналогов) при небольших возмущениях их "теоретической" формы.

2. После проведенного рассмотрения бездисперсионного волнового уравнения (1) на предмет существования различных типов его решений (в том числе, дисперсионных), появились все основания для постановки "противоположной" задачи: для дисперсионной среды и соответствующего дисперсионного волнового уравнения исследовать возможности существования неодномерных бездисперсионных решений (волновых структур), что привлекательно для практических приложений.

В заключение сделаем два замечания:

1. Рассмотренные процедуры решения уравнения (1) фактически сводят исходную линейную задачу к решению нелинейных уравнений, что нетипично для общей тенденции "от более сложного к более простому" в решениях тех или иных задач. Однако иногда рациональное усложнение исходной задачи расширяет возможности и разнообразие в поиске различных решений, что и было продемонстрировано выше (другой пример следования этому принципу см. в [18]).

2. Рассмотренная здесь вторая процедура для нахождения дисперсионных решений данного линейного уравнения сходна с использованной нами в [19] методикой решения нелинейных уравнений акустики на основе того же анзаца (5) "относительно неискажающихся волн". Здесь интересен сам факт практически единого метода для решения линейных и нелинейных уравнений (обычно это совершенно разные методы), а также вытакающая отсюда аналогия между дисперсионными решениями линейного уравнения и решениями "соответствующего" нелинейного уравнения.

Автор признателен О.В. Руденко за полезные замечания при подготовке данной статьи. Работа частично поддержана грантом РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киселев А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 102. № 4. С. 661–681.
2. *Kiselev A.P., Perel M.V.* Highly localized solutions of the wave equation // J. Math. Phys. 2000. V. 41. № 4. P. 1934–1955.
3. Ультразвук. Маленькая энциклопедия (под ред. Голяминой И.П.). М.: Советская энциклопедия, 1979. 400 с.
4. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. *Воронов Б.Б., Коробов А.И., Руденко О.В.* Нелинейные акустические волны в средах с поглощением и дисперсией // УФН. 1992. Т. 162. № 9. С. 159–176.
6. *Гаврилов А.М., Ситников Р.О.* Измерение геометрической дисперсии в звуковом пучке // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 641–647.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: ГТТИ, 1945. 620 с.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Hillion P.* Nondispersive waves: Interpretation and Causality // IEEE Trans. Antennas Propag. 1992. V. AP-40. P. 1031–1035.
10. *Hillion P.* Generalized Phases and Nondispersive Wave // Acta applicandae Mathematicae. 1993. V. 30. P. 35–45.
11. *Bateman H.* The conformal transformation of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics // Proc. London Math. Soc. 1909. V. s2-7. P. 70–89.
12. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
13. *Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В.* Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона // Препринт 90.39, Институт математики АН УССР. Киев, 1990. 35 с. (см. также *Fushchych W.I.* Scientific Works. V. 4. P. 126–160. Kyiv, 2002. 575 p.)

14. *Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В.* Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 11. С. 1471–1486 (см. также *Fushchych W.I.* Scientific Works. V. 4. P. 361–378. Kyiv, 2002. 575 p.)

15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

16. *Saari P.* Evolution of near-cycle pulses in focused optical beams // Laser Phys. 2002. V. 12. № 4. P. 812–817.

17. Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. V. 4. № 4. P. 651–654.

18. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 1–15.

19. *Маков Ю.Н.* Относительно неискажающиеся волны и профили в нелинейной акустике // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 2. С. 160–170.