

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
ДЛЯ КВАЗИГАУССОВСКОГО ПУЧКА В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ
ДВУХ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ КООРДИНАТАМИ

© 2012 г. О. А. Сапожников^{1,2}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991 Москва, Ленинские горы

²Центр промышленного и медицинского ультразвука, Лаборатория прикладной физики,
университет шт. Вашингтон, Сиэтл, шт. Вашингтон, 98105, США

E-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 05.07.11 г.

Предложено точное решение уравнения Гельмгольца, описывающее квазигауссовский пучок произвольной ширины. Решение является суперпозицией источников и стоков с комплексными координатами. Показано, что в таком пучке всегда отсутствует компонента, распространяющаяся против основного направления, а при превышении диаметром перетяжки пучка длины волны пучок является направленным и в широком смысле: относительно плоскости перетяжки пучка выполняется условие излучения. Для исследованного пучка найдены выражения для углового спектра и для коэффициентов разложения по сферическим гармоникам.

Ключевые слова: квазигауссовские пучки, точные решения уравнения Гельмгольца.

ВВЕДЕНИЕ

Волновые пучки с гауссовской поперечной структурой интенсивности (гауссовские пучки) являются важным объектом волновой физики; наибольшее применение они нашли в оптике, где соответствующее решение представляют нулевую поперечную моду лазерных резонаторов [1]. Благодаря своим простым свойствам гауссовские пучки часто используются при теоретическом анализе волн иной природы, например акустических [2]. Гауссовские пучки возникают в теории как решение параболического уравнения теории дифракции, которое описывают истинное поле лишь в параксиальном приближении. В приложениях, где используются сильно фокусированные поля, такой подход становится неточным и возникает потребность в простых решениях в виде пучков, удовлетворяющих уже не параболическому уравнению, а уравнению Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

где p — комплексная амплитуда акустического давления, $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость звука. В работах [3, 4] было показано, что имеется точное решение уравнения (1), которое вблизи оси представляет почти гауссовский пучок. Решение имеет вид поля точечного источника, в котором аксиальная координата источника является

чисто мнимой [5]. В общем случае поле точечного источника имеет вид:

$$p = \frac{Ae^{ikR}}{R}. \quad (2)$$

Здесь предполагается зависимость от времени вида $p \sim e^{-i\omega t}$, A — произвольная константа, $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — расстояние до источника, (x_0, y_0, z_0) — координаты источника. Если выбрать $x_0 = y_0 = 0$, а $z_0 = iz_d$, где z_d — действительная константа с размерностью длины, то в области при $R \neq 0$ формула (2) представит точное решение уравнения Гельмгольца. Обозначим

$r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда решение (2) принимает вид:

$$p = A \frac{e^{ik\sqrt{r_{\perp}^2 + (z-iz_d)^2}}}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z-iz_d)^2}}. \quad (3)$$

Оно переходит в гауссовский пучок, если $r_{\perp} \ll \ll \sqrt{z^2 + z_d^2}$. Действительно, при этом

$$R = \sqrt{r_{\perp}^2 + (z-iz_d)^2} = \pm(z-iz_d) \sqrt{1 + \frac{r_{\perp}^2}{(z-iz_d)^2}} \approx \approx \pm \left[(z-iz_d) + \frac{r_{\perp}^2}{2(z-iz_d)} \right]. \quad (4)$$

Отметим, что формально оба знака перед квадратным корнем допустимы, т.е. дают точное решение

уравнения (1), но для обеспечения одностороннего распространения волны следует выбрать нужный знак. Считая волну распространяющейся слева направо, выберем верхний знак и запишем решение (3) приближенно в виде

$$p \approx \frac{A}{z - iz_d} \exp \left[ik(z - iz_d) + \frac{ikr_{\perp}^2}{2(z - iz_d)} \right] = \frac{p_0}{1 + iz/z_d} e^{ikz} \exp \left(-\frac{r_{\perp}^2/a^2}{1 + iz/z_d} \right), \quad (5)$$

где $p_0 = iAe^{kz_d}/z_d$, $a = \sqrt{2z_d/k}$. Решение (5) есть не что иное, как гауссовский пучок с исходной амплитудой волны на оси p_0 и поперечным радиусом a . Введенная ранее длина z_d выражается через a как

$$z_d = ka^2/2 \quad (6)$$

и имеет смысл длины дифракционной расходимости пучка.

Казалось бы, решение (3) обобщает параксиальный гауссовский пучок (5) на общий случай и поэтому может использоваться для описания пучков с произвольной расходимостью. Однако это не так. Решение (3) обладает особенностью, делающей его неприменимым для строгого описания свободно распространяющихся пучков. Прежде всего, следует отметить, что в точке $(z, r_{\perp}) = (0, z_d)$ имеется сингулярность $p \rightarrow \infty$. При этом в (2) $R \rightarrow 0$, т.е. соответствующим уравнением является не однородное уравнение Гельмгольца (1), а уравнение с источником в правой части. Более подробный анализ показывает, что решение (3), которое в приосевой области имеет вид направленного гауссовского пучка, требует введения разреза вдоль линии $(z = 0, r_{\perp} > z_d)$, чтобы гарантировать выбор нужной ветви функции $\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2}$ [6, 7], т.е. волна фактически пропускается через круглое отверстие радиуса z_d в экране, расположенном при $z = 0$. Пучок можно считать свободно распространяющимся лишь при условии, что диаметр отверстия намного превышает диаметр пучка, т.е. особенность находится далеко от оси: $z_d \gg a$. С учетом (6) это требование эквивалентно $ka \gg 2$, т.е. диаметр пучка должен намного превышать длину волны. Но в этих условиях выполняется параксиальное приближение, т.е. точное решение (3) не дает никакого выигрыша по сравнению с приближенным решением (5).

Чтобы устранить указанный дефект решения (3), в работе [8] было предложено добавить к точечно-

му источнику равный по силе и противоположный по знаку сток:

$$p = A \times \frac{\exp \left[ik\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2} \right] - \exp \left[-ik\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2} \right]}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2}} \sim \frac{\sin \sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2}}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2}}. \quad (7)$$

Эта функция уже не имеет особенностей и поэтому больше подходит для описания свободно распространяющегося пучка [6, 9]. Некоторым его недостатком по сравнению с полем (3) является наличие встречных волн, которые исчезают лишь в широкоапертурном приближении $kz_d \gg 1$.

КВАЗИГАУССОВСКИЙ ПУЧОК КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ ПОЛЕЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

Целью настоящей работы является описание более физического точного решения уравнения Гельмгольца для квазигауссовского пучка. В качестве такого решения предлагается использовать следующее:

$$p = p_0 \frac{z_d}{2 \operatorname{sh}^2(kz_d)} \left[e^{kz_d} \frac{\sin \left(k\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2} \right)}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z - iz_d)^2}} - e^{-kz_d} \frac{\sin \left(k\sqrt{r_{\perp}^2 + (z + iz_d)^2} \right)}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z + iz_d)^2}} \right]. \quad (8)$$

Как нетрудно видеть, формула (8) является суперпозицией четырех решений вида (3) — двух пар “источник—сток”. Множитель перед скобкой подобран так, чтобы $p = p_0$ при $(z, r_{\perp}) = (0, 0)$. Важно отметить, что входящие в эту формулу функции $\sin R_{\pm}/R_{\pm}$, где $R_{\pm} = \sqrt{r_{\perp}^2 + (z \mp iz_d)^2}$, не имеют особенностей и точек ветвления, т.е. решение (8) лишено недостатков представления (3). В отличие от ранее предложенного решения (7), в формуле (8) имеется вторая пара “источник—сток”, которая обеспечивает отсутствие волны, распространяющейся в строго встречном направлении $-z$ (см. ниже). Отметим, что при $kz_d = (ka)^2/2 \gg 1$ все три представления (3), (7) и (8) переходят в решение (5) для гауссовского пучка. Различия проявляются лишь при $ka < \sim 1$. Однако именно этот диапазон представляет интерес при описании сильно фокусированных (или сильно расходящихся) пучков. Решение (8) в этом смысле кажется наиболее привлекательным.

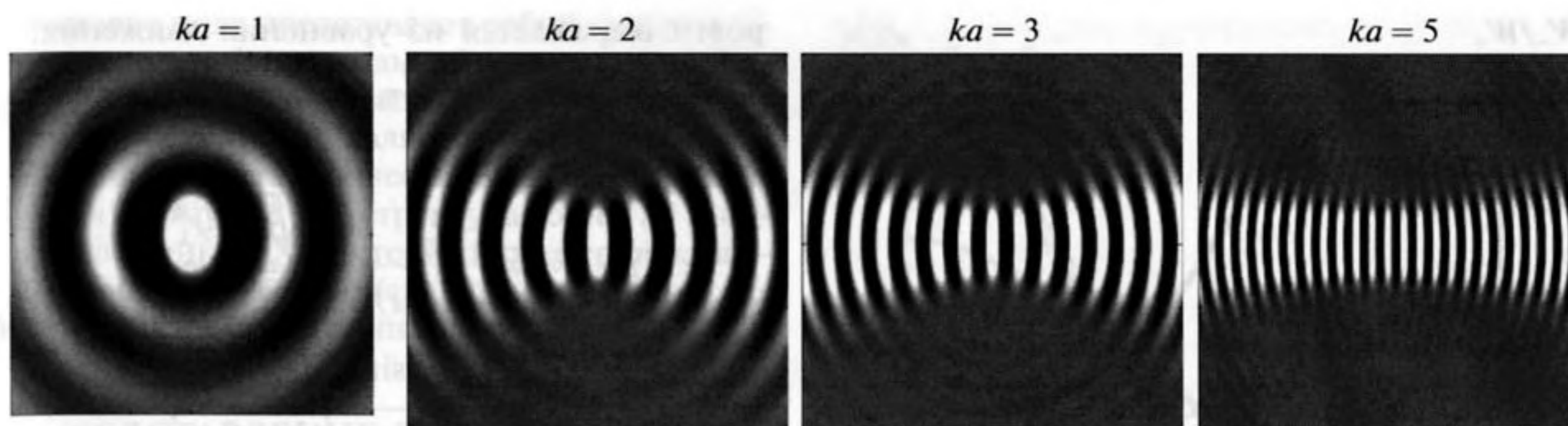


Рис. 1. Мгновенное распределение акустического давления в квазигaussianовском пучке при одинаковом радиусе перетяжки a , но различных значениях параметра ka (он указан над изображениями). Комплексная амплитуда волны описывается формулой (8). Ось z направлена слева направо. Градации серого изменяются линейно в диапазоне ± 0.2 от амплитуды давления в центре перетяжки.

На рис. 1 показано распределение полного акустического давления $\tilde{p}(z, r_{\perp}, t) = (pe^{-i\omega t} + p^*e^{i\omega t})/2$ в момент времени $t = 0$ (т.е. $\text{Re } p$) для различных значений параметра ka . При таком представлении видна геометрия волновых фронтов и соотношения характерных масштабов в пучке (длины волны и радиуса перетяжки). Как видно, при $ka = 1$ структура волны мало напоминает направленный пучок. Однако уже при $ka = 2$ направленность явно выражена, хотя при этом диаметр перетяжки составляет менее длины волны. С ростом ka расходимость пучка уменьшается.

У решения (8) все же имеется определенный недостаток: строго говоря, оно не удовлетворяет условию распространения всей волны слева направо, т.е. условию излучения (аналогичная особенность имеется и в решении (7)). Действительно, рассмотрим формулу (8) на больших расстояниях. Перейдем к сферической системе координат $r_{\perp} = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Тогда $R_{\pm}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow r \mp iz_d \cos \theta$, что дает:

$$p|_{r \rightarrow \infty} = p_0 \frac{z_d}{2i \text{sh}^2(kz_d)} \times \left[\frac{e^{ikr}}{r} \text{sh}[kz_d(1 + \cos \theta)] - \frac{e^{-ikr}}{r} \text{sh}[kz_d(1 - \cos \theta)] \right]. \quad (9)$$

Если нормировать амплитуды сходящейся и расходящейся волн на амплитуду расходящейся волны при $\theta = 0$, то получим следующие диаграммы направленности для волн $p_{\infty}^{(\pm)}(\theta) \sim e^{\pm ikr}/r$:

$$D_{\pm}(\theta) = \frac{p_{\infty}^{(\pm)}(\theta)}{p_{\infty}^{(\pm)}(0)} = \frac{\text{sh}[kz_d(1 \pm \cos \theta)]}{\text{sh}(2kz_d)}. \quad (10)$$

Эти зависимости показаны на рис. 2 для различных значений ka . При $z > 0$ ($0 \leq \theta < 90^\circ$) $D_+(\theta)$ превышает $D_-(\theta)$, а при $z < 0$ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) соотношение обратное. Этим обеспечивается направленность пучка. Вдоль направления оси пучка

$D_+(\pi) = D_-(0) = 0$, т.е. встречная волна отсутствует. Таким образом, направленность вблизи оси пучка в рамках решения (8) гарантируется при любом ka .

Строго говоря, волновое поле можно считать направленным пучком лишь в том случае, когда при $z < 0$ для всех направлений имеется только приходящая из бесконечности волна вида e^{-ikr}/r , а при $z > 0$ — только уходящая волна вида e^{ikr}/r . Как видно, при $ka < 3$ это условие не выполняется; имеется паразитная встречная волна. Физическая причина этого понятна: если рассматривать пучок как излучение источника, имеющего форму сферической чаши большого размера, то для достижения малого значения перетяжки пучка a придется увеличивать угол раскрытия источника (т.е. глубину чаши) вплоть до полного охвата точки фокусировки.

С ростом ka уже при $ka \geq 3$ направленность устанавливается: паразитная встречная волна практически спадает до нуля. При этом $D_{\pm}(\theta)$ име-

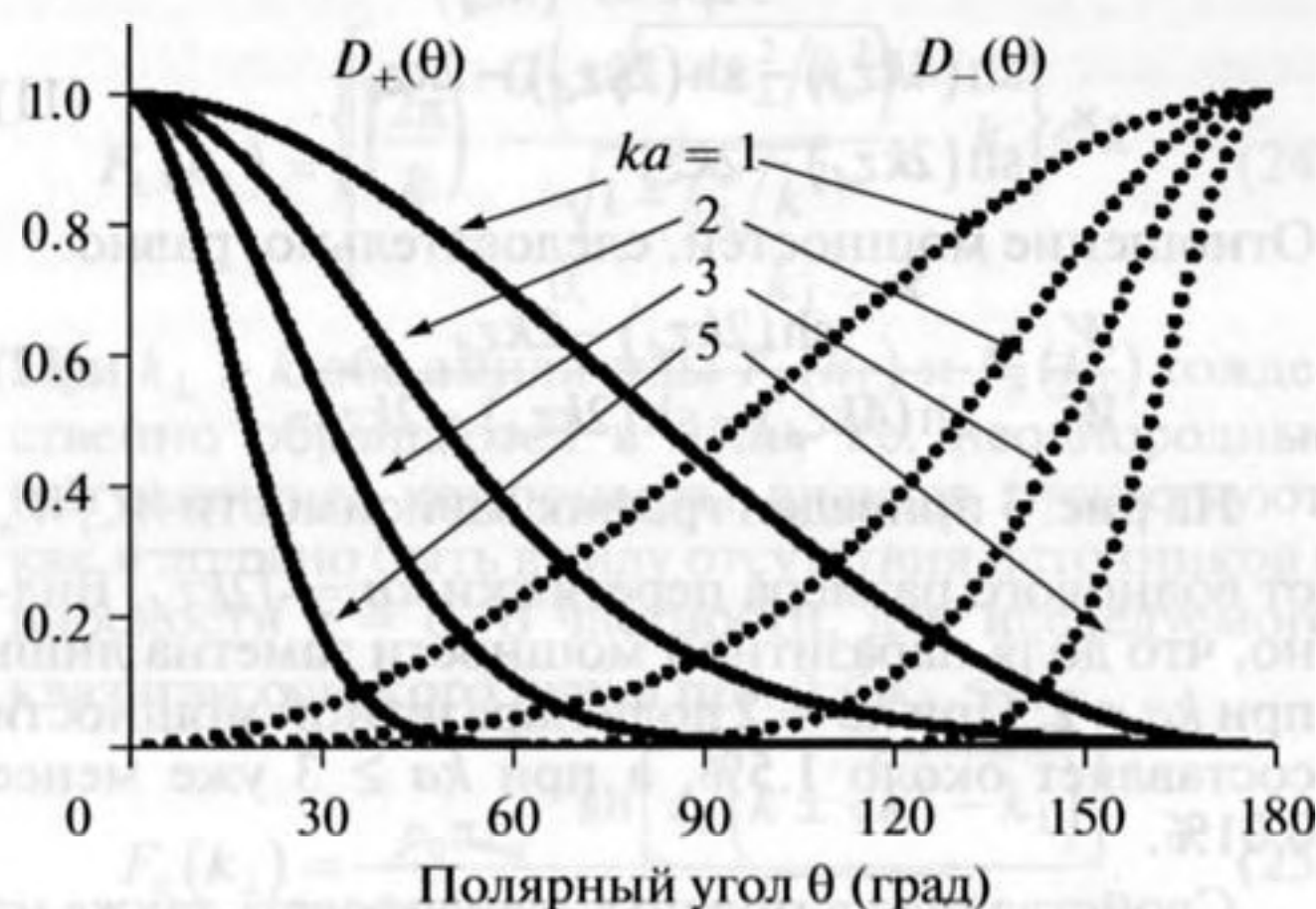


Рис. 2. Диаграмма направленности расходящихся и сходящихся составляющих решения (8) для различных значений параметра ka .

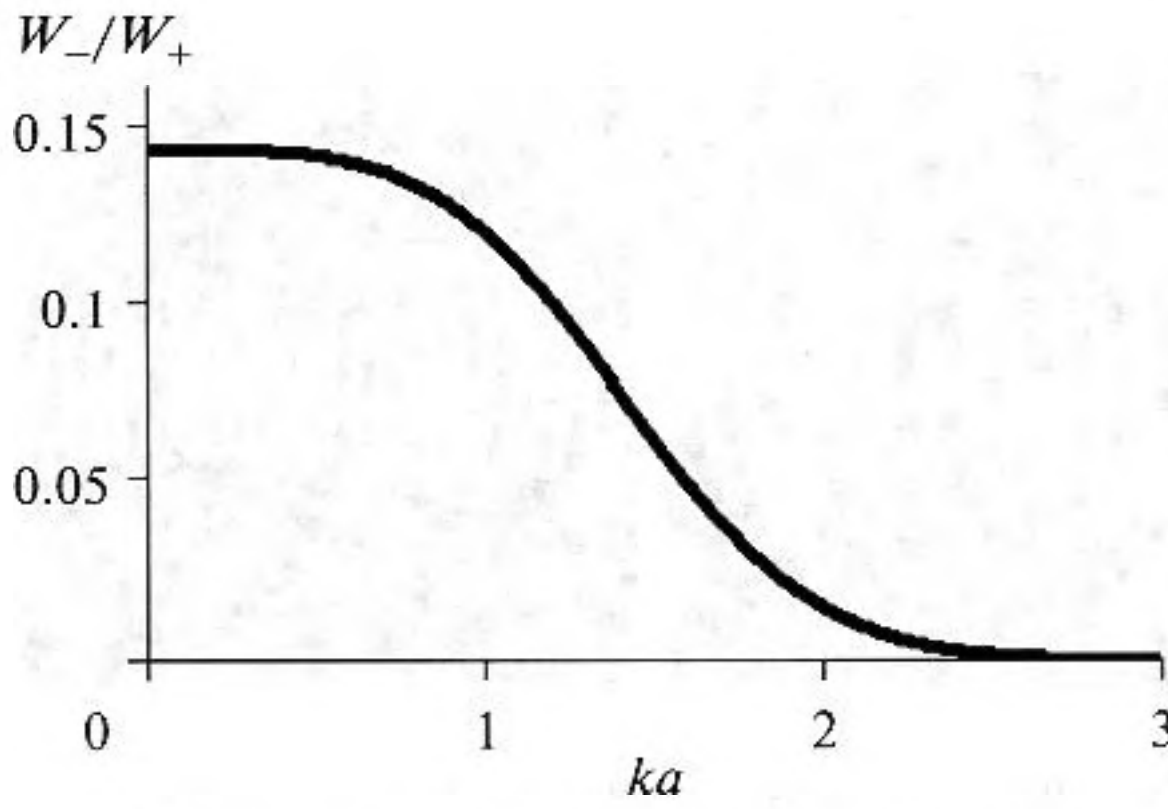


Рис. 3. Отношение мощностей встречной и попутной составляющей в пучке в зависимости от параметра ka .

ет колоколообразный (т.е. почти гауссовский) вид. Отметим, что значение $ka \approx 3$, начиная с которого паразитная встречная волна пренебрежимо мала, соответствует радиусу пучка $a \approx \lambda/2$, т.е. при этом перетяжка пучка близка к дифракционному пределу. Таким образом, решение (8) представляет направленный пучок вплоть до диаметра перетяжки, равного длине волны.

Относительный вклад паразитной волны можно характеризовать отношением ее мощности к мощности основной волны. Рассмотрим для определенности область $z > 0$. Тогда, согласно (9), в дальней зоне интенсивности основной и паразит-

ной волн составляют $I_{\pm}|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\rho c} \left(\frac{p_0 z_d}{2 \text{sh}^2(kz_d)} \right)^2 \times \frac{\text{sh}^2[kz_d(1 \pm \cos\theta)]}{r^2}$. Полные мощности волн $W_{\pm} = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} I_{\pm} \sin\theta d\theta$ оказываются следующими:

$$W_{\pm} = \pi a^2 \frac{p_0^2}{32\rho c \text{sh}^4(kz_d)} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{sh}(4kz_d) - \text{sh}(2kz_d) - 2kz_d \\ \text{sh}(2kz_d) - 2kz_d \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Отношение мощностей, следовательно, равно:

$$\frac{W_-}{W_+} = \frac{\text{sh}(2kz_d) - 2kz_d}{\text{sh}(4kz_d) - \text{sh}(2kz_d) - 2kz_d}. \quad (12)$$

На рис. 3 приведен график зависимости W_-/W_+ от волнового размера перетяжки $ka = \sqrt{2kz_d}$. Видно, что доля паразитной мощности заметна лишь при $ka < 2$. При $ka = 2$ доля паразитной мощности составляет около 1.5%, а при $ka \geq 3$ уже менее 0.01%.

Свойства пучка можно анализировать также на основе распределения скорости и давления в перетяжке пучка, т.е. при $z = 0$. Комплексная амплитуда аксиальной компоненты колебательной ско-

рости выражается из уравнения движения: $v_z = \frac{1}{ik\rho c} \frac{\partial p}{\partial z}$, где ρ — плотность среды. Согласно решению (8), имеем:

$$p|_{z=0} = p_0 \frac{kz_d}{\text{sh}(kz_d)} \frac{\text{sh}\left(k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}\right)}{k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}} = p_0 \frac{kz_d}{\text{sh}(kz_d)} \frac{\sin\left(k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}\right)}{k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}}, \quad (13)$$

$$v_z|_{z=0} = \frac{p_0 \text{ch}(kz_d)}{\rho c \text{sh}^2(kz_d)} \frac{(kz_d)^2}{\left(k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}\right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\text{sh}\left(k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}\right)}{k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}} - \text{ch}\left(k\sqrt{z_d^2 - r_{\perp}^2}\right) \right] = \frac{p_0 \text{ch}(kz_d)}{\rho c \text{sh}^2(kz_d)} \times \times \frac{(kz_d)^2}{\left(k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}\right)^2} \left[\frac{\sin\left(k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}\right)}{k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}} - \cos\left(k\sqrt{r_{\perp}^2 - z_d^2}\right) \right]. \quad (14)$$

Здесь представлены две возможные формы записи, первая из которых удобна при $r_{\perp} \leq z_d$, а вторая — при $r_{\perp} > z_d$. Видно, что и акустическое давление, и аксиальная компонента скорости описываются действительными функциями, т.е. плоскость $z = 0$ совпадает с плоскостью фазового фронта. Акустическая мощность W , проходящая через сечение $z = 0$, равна интегралу по площади сечения от интенсивности $I = \text{Re}(pv_z^*)/2$. С учетом (13) и (14) получим:

$$W = \frac{\pi a^2 p_0^2 \text{ch}(kz_d)}{4\rho c \text{sh}(kz_d)}. \quad (15)$$

Из формул (11) и (15) следует:

$$W = W_+ - W_-, \quad (16)$$

как и должно быть в силу закона сохранения энергии.

Насколько оправданно называть пучок, описываемый формулой (8), квазигауссовским пучком? Ответ на этот вопрос дает рис. 4, на котором приведено поперечное распределение амплитуды волны в перетяжке пучка ($z = 0$) и на расстоянии, равном длине дифракции ($z = z_d$). Как видно, если при $ka = 3$ небольшое отклонение от точной гауссоиды еще заметно, то при больших ka профиль пучка едва отличим от гауссовского.

Как уже отмечалось выше, при $ka < 3$ пучок теряет свойство направленности. В пределе $ka \rightarrow 0$ представление (8) превращается в следующее:

$$p|_{ka \ll 1} \approx p_0 \left\{ \frac{\sin kr}{kr} + i \cos\theta \left[\frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right] \right\}, \quad (17)$$

т.е. волновое поле представляет собой суперпозицию монопольной и дипольной стоячих волн. Дипольная составляющая задает волне некоторую направленность, но не является достаточной для устранения эффекта стоячести. Заметим, что описываемая формулой (17) структура волны не зависит от величины a . Характерный размер перетяжки, как видно, имеет порядок длины волны, т.е. определяется дифракционным пределом.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПУЧКА В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

При расчетах иногда удобно описывать пучок с помощью разложения решения по плоским волнам. Любое решение уравнения Гельмгольца (1) представимо в виде суперпозиции плоских волн разных направлений:

$$p(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \Pi(\theta, \varphi) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (18)$$

где величина $\Pi(\theta, \varphi)$ характеризует амплитуду волны с волновым вектором \mathbf{k} , направление которого характеризуется углами θ и φ сферической системы координат: $\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Если радиус-вектор точки наблюдения также задать в сферической системе координат $\mathbf{r} = r(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$, то, вычисляя интеграл в пределе $r \rightarrow \infty$ методом стационарной фазы, получим связь $\Pi(\theta, \varphi)$ с поведением волны на больших расстояниях:

$$p(r, \theta, \varphi)|_{r \rightarrow \infty} = 2\pi \frac{\Pi(\theta, \varphi) e^{ikr} - \Pi(\pi - \theta, \varphi + \pi) e^{-ikr}}{ikr}. \quad (19)$$

Сравнивая это выражение с асимптотикой (9), получим:

$$\Pi(\theta, \varphi) = p_0 \frac{kz_d \operatorname{sh}[kz_d(1 + \cos \theta)]}{4\pi \operatorname{sh}^2(kz_d)} = G(\cos \theta). \quad (20)$$

В силу аксиальной симметрии функция $\Pi(\theta, \varphi) = G(\cos \theta)$ оказалась независимой от полярного угла. Поэтому интеграл по φ в формуле (18) дает функцию Бесселя, и указанное разложение переходит в следующее:

$$p(r_\perp, z) = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta G(\cos \theta) J_0(kr_\perp \sin \theta) e^{ikz \cos \theta}. \quad (21)$$

Рассмотрим также представление поля через угловой спектр, задаваемый в плоскости $z = 0$. Поскольку относительно указанной плоскости имеются пучки двух направлений — распространяющиеся вправо и влево — то разложение в угловой спектр имеет две составляющие:

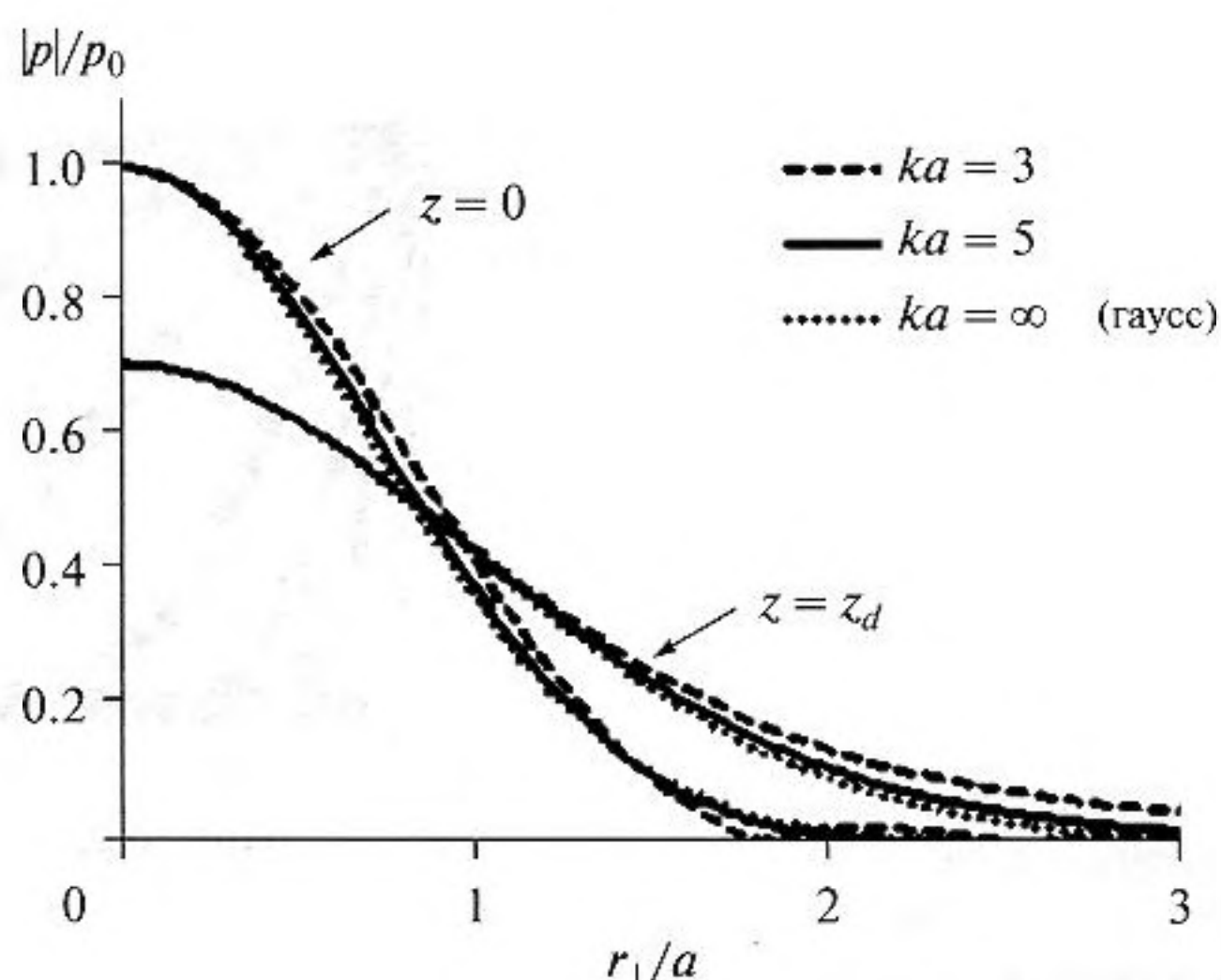


Рис. 4. Поперечное распределение амплитуды акустического давления для различных ka на расстояниях $z = 0$ и $z = z_d$.

$$p(r_\perp, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [F_+(k_\perp) e^{iz\sqrt{k^2 - k_\perp^2}} + F_-(k_\perp) e^{-iz\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}] \times J_0(k_\perp r_\perp) k_\perp dk_\perp, \quad (22)$$

где $F_+(k_\perp)$ и $F_-(k_\perp)$ — спектральные амплитуды для попутного и встречного пучков. Для нахождения указанных амплитуд перепишем формулу (21), разбивая интервал интегрирования на два и вводя переменную интегрирования $k_\perp = k \sin \theta$:

$$p(r_\perp, z) = \frac{2\pi}{k} \int_0^k \left[G\left(\frac{\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}{k}\right) e^{iz\sqrt{k^2 - k_\perp^2}} + G\left(-\frac{\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}{k}\right) e^{-iz\sqrt{k^2 - k_\perp^2}} \right] \frac{J_0(k_\perp r_\perp) k_\perp dk_\perp}{\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}. \quad (23)$$

Сравнивая (22) и (23), получим:

$$F_\pm(k_\perp) = \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \frac{G\left(\pm\sqrt{1 - k_\perp^2/k^2}\right)}{\sqrt{1 - k_\perp^2/k^2}}, & k_\perp \leq k \\ 0, & k_\perp > k \end{cases}. \quad (24)$$

При $k_\perp > k$ обе амплитуды $F_+(k_\perp)$ и $F_-(k_\perp)$ тождественно обращаются в нуль, т.е. неоднородные (затухающие) компоненты спектра отсутствуют, как и должно быть в силу отсутствия источников в плоскости $z = 0$. В частности, для исследуемого квазигaussianского пучка при $0 \leq k_\perp \leq k$

$$F_\pm(k_\perp) = \frac{p_0 \pi z_d}{\operatorname{sh}^2(kz_d)} \frac{\operatorname{sh}\left[z_d \left(k \pm \sqrt{k^2 - k_\perp^2}\right)\right]}{\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}. \quad (25)$$

Отметим, что поскольку $v_z = (ikrc)^{-1} \partial p / \partial z$, угловые спектры аксиальной компоненты колеба-



Рис. 5. Нормированные амплитуды сферических гармоник g_n (показаны кружками) в зависимости от их номера n при различных ka .

тельной скорости получаются из спектров давления $F_{\pm}(k_{\perp})$ умножением на $\pm\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}/(krc)$. Зависимости спектральных амплитуд скорости для встречной и попутной волн $F_{\pm}(k_{\perp})$ в диапазоне $0 \leq k_{\perp} \leq k$ повторяют показанные на рис. 2 графики для $D_{\pm}(\theta)$ в диапазоне $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Поэтому при $ka \geq 3$ вкладом встречной волны в угловой спектр можно пренебречь.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПУЧКА В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Наряду с рассмотренным выше разложением пучка (8) по плоским волнам разных направлений, в ряде задач полезным может оказаться представление исследуемого пучка в виде разложения по сферическим гармоникам. Для нахождения соответствующего представления воспользуемся теоремой сложения для функций Бесселя [10]:

$$\frac{\sin W}{W} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\cos \theta) \frac{J_{n+1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{J_{n+1/2}(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}, \quad (26)$$

где $W = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta \cos \theta}$ и предполагается, что все переменные, вообще говоря, комплексны, а знак перед корнем выбирается таким, чтобы при $\zeta \rightarrow 0$ корень был положительным. При записи через сферические функции Бесселя $j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} \times J_{n+1/2}(x)$ получим:

$$\frac{\sin W}{W} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(\xi) j_n(\zeta). \quad (27)$$

Пусть $\xi = kr$, $\zeta = ikz_d$. Тогда можно записать:

$$\frac{\sin \left[k\sqrt{r_{\perp}^2 + (z \mp iz_d)^2} \right]}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (z \mp iz_d)^2}} = \quad (28)$$

$$= k \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(kr) j_n(\pm iz_d).$$

Сферическая функция Бесселя чисто мнимого аргумента выражается через функцию Инфельда действительного положительного аргумента: $j_n(ix) = i^n \sqrt{\pi/2x} I_{n+1/2}(x)$, $j_n(-ix) = (-1)^{n+1} i^n \sqrt{\pi/2x} I_{n+1/2}(x)$. С учетом этого приходим к искомому представлению квазигауссовского пучка (8) в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$p = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) g_n(kz_d) j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (29)$$

где использованы следующие обозначения:

$$g_n(x) = \frac{1 - (-1)^n e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} \zeta_n(x), \quad (30)$$

$$\zeta_n(x) = e^{-x} \sqrt{2\pi x} I_{n+1/2}(x). \quad (31)$$

Заметим, что ряд (29) всюду сходится. Функции Инфельда полуцелого аргумента выражаются через показательную функцию [10]. В частности, для низших индексов функции $\zeta_n(x)$ имеем: $\zeta_0(z) = 1 - e^{-2z}$, $\zeta_1(z) = 1 - z^{-1} + e^{-2z}(1 + z^{-1})$. Остальные функции могут быть выражены на основе рекуррентной формулы $\zeta_n(z) = -\zeta_{n-1}(z)(2n-1)/z + \zeta_{n-2}(z)$. Однако этот алгоритм с ростом n неустойчив, поэтому при численных расчетах удоб-

нее использовать обратный рекуррентный алгоритм $\zeta_{n-1}(z) = \zeta_n(z)(2n+1)/z + \zeta_{n+1}(z)$.

Зависимость относительных амплитуд гармоник g_n от их номера для различных значений ka приведена на рис. 5. Коэффициенты g_n уменьшаются с ростом номера n , спадая от $g_0 = 1$ практически до нуля при $n > 5ka$. Это означает, что при $ka \sim \sim 1$ в разложении (29) достаточно иметь относительно небольшое количество членов ряда, что удобно при проведении расчетов. Для широких пучков ($ka \gg 1$) с учетом асимптотики $I_{n+1/2}(x \gg n) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$ при $x = kz_d \rightarrow \infty$ получаем $g_n(kz_d) \rightarrow 1$, как и должно быть в случае плоской волны [10].

Рассмотрим поведение решение в виде ряда (29) в пределе $ka \rightarrow 0$. Для этого используем, что при малых значениях аргумента функция Инфельда выражается следующим образом: $I_\nu(x)|_{x \rightarrow 0} \rightarrow (x/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$, где $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция [10]. Отсюда следует, что $\zeta_n(x)|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 2x^{n+1} / [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)]$. Поэтому, согласно (30), $g_0(0) = 1$, $g_1(0) = 1/6$, $g_{n \geq 2}(0) = 0$, т.е. в пределе $ka \rightarrow 0$ ряд (29) содержит лишь два члена и, как и должно быть, превращается в выражение (17).

Полезно также исследовать поведение ряда (29) в дальнем поле. Заметим, что поскольку коэффициенты ряда $(2n+1)g_n(kz_d)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд фактически содержит конечное число членов (см. рис. 5). Это означает, что при $r \rightarrow \infty$, для всех входящих в ряд функций Бесселя $j_n(kr)$ можно считать $kr \gg n$, что позволяет использовать асимптотику $j_n(x) \approx \text{Re} [(-i)^{n+1} e^{ix}] / x$. Следовательно,

$$p|_{r \rightarrow \infty} = \frac{p_0}{2ikr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) g_n [e^{ikr} - (-1)^n e^{-ikr}] P_n(\cos \theta) \quad (32)$$

Сравнивая получившуюся формулу с выражением (19), получим связь амплитуд плоских волн $\Pi(\theta, \varphi) = G(\cos \theta)$ в разложении (18) с коэффициентами g_n в разложении по сферическим гармоникам (29):

$$G(\cos \theta) = \frac{p_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) g_n P_n(\cos \theta) \quad (33)$$

Поскольку эта связь получена без использования явного вида g_n , то она справедлива для аксиально-симметричного пучка произвольного вида. Пользуясь свойством ортогональности полиномов Лежандра $\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = 2\delta_{nl} / (2n+1)$, обратим

(33), т.е. выразим коэффициенты g_n через функцию направленности $G(\cos \theta)$:

$$g_n = \frac{2\pi}{p_0} \int_{-1}^1 G(x) P_n(x) dx \quad (34)$$

Например, если $G(\cos \theta)$ задать в виде (20), то коэффициенты g_n будут определяться выражениями (30)–(31). В этом нетрудно убедиться, используя табличный интеграл $\int_{-1}^1 e^{-bx} P_n(x) dx = (-1)^n \sqrt{2\pi/b} \times I_{n+1/2}(b)$ [11].

Аналогичным образом можно сконструировать и другие пучки. В частности, для класса направленных пучков функция $G(x) \equiv 0$ при $-1 \leq x < 0$. При этом $F_-(k_\perp) = 0$, т.е. все возможные плоские волны распространяются вправо и описываются угловым спектром волн $F_+(k_\perp)$. Используя соотношение (24), получим выражение для связи коэффициентов разложения по сферическим гармоникам (29) g_n с угловым спектром $F_+(k_\perp)$:

$$g_n = \frac{k^2}{2\pi p_0} \int_0^1 F_+(k\sqrt{1-x^2}) P_n(x) x dx \quad (35)$$

Представление (29) с коэффициентами (35) может быть удобным при решении ряда задач, например при анализе рассеяния на сферически симметричных объектах [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное в данной работе точное решение уравнения Гельмгольца (8) описывает квази-гауссовские пучки, диаметр перетяжки которых может быть сравнимым с длиной волны. Решение является суперпозицией двух точечных источников и двух точечных стоков с комплексными координатами. Показано, что в таком пучке всегда отсутствует компонента, распространяющаяся против основного направления, а при превышении диаметром перетяжки пучка длины волны пучок является направленным и в широком смысле: доля мощности паразитной встречной волны становится пренебрежимо малой. Для исследованного пучка найдены выражения для углового спектра и для коэффициентов разложения по сферическим гармоникам.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 11-02-01189 и НИИ ДК043881.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kogelnik H., Li T. Laser beams and resonators // Proceedings of IEEE. 1966. V. 54. P. 1321–1329.

2. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
3. Izmet'ev A.A. One parameter wave beams in free space // Radiophys. Quant. Electron. 1970. V. 13. № 9. P. 1062–1068.
4. Deschamps G.A. Gaussian beam as a bundle of complex rays // Electron. Lett. 1971. V. 7. № 23. P. 684–685.
5. Couture M., Belanger P.-A. From Gaussian beam to complex-source-point spherical wave // Phys. Rev. A. 1981. V. A24. P. 355–359.
6. Heyman E., Felsen L.B. Complex-source pulsed-beam fields // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V. 6. № 6. P. 806–817.
7. Tagirdzhanov A.M., Blagovestchenskii A.S., Kiselev A.P. "Complex source": Singularities in real space // Proceedings of symposium "Progress in Electromagnetics Research", Moscow, 2009. P. 1527–1529.
8. Berry M.V. Evanescent and real waves in quantum billiards and Gaussian beams // J. Phys. A. 1994. V. A27. P. L391–L398.
9. Sheppard C.J.R., Saghafi S. Beam modes beyond the paraxial approximation: a scalar treatment // Phys. Rev. A. 1998. V. A57. P. 2971–2979.
10. Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 799 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 428 с.
12. Поддубняк А.П. Резонансное рассеяние акустических волн упругой сферической оболочкой в жидкости // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 89–95.