

УДК 534.2

## МЕХАНИЗМЫ НАСЫЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ФОКУСИРОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПУЧКАХ

© 2012 г. М. М. Карзова<sup>1</sup>, М. В. Аверьянов<sup>1</sup>, О. А. Сапожников<sup>1,2</sup>, В. А. Хохлова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

119991 Москва, Ленинские горы

E-mail: {masha, misha}@acs366.phys.msu.ru

<sup>2</sup>Центр промышленного и медицинского ультразвука, Лаборатория прикладной физики, университет шт. Вашингтон, Сизтл, шт. Вашингтон, 98105, США

E-mail: vera@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 20.06.2011 г.

На основе численного решения уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова исследованы акустические поля мощных ультразвуковых излучателей с гауссовской пространственной аподизацией и начальным возбуждением в виде периодической волны или одиночного импульса. Сравняется влияние нелинейных эффектов на пространственную структуру фокусированных пучков, а также на величины предельно достижимых параметров акустического поля. Показано, что в периодических полях насыщение давления связано, в основном, с эффектом нелинейного поглощения на ударном фронте, а в импульсных – с эффектом нелинейной рефракции. Предельно достижимые значения пикового положительного давления в периодических полях оказались выше, чем аналогичные значения в импульсных акустических полях. Полная энергия пучка периодических волн спадает при удалении от излучателя быстрее, чем энергия импульсного поля, однако концентрируется в значительно меньшей пространственной области в районе фокуса. Эти особенности проявления нелинейных эффектов дают возможность использовать импульсные пучки для более эффективной доставки энергии волны к фокусу, а периодические – для достижения более высоких значений амплитуды давления в фокальной области.

*Ключевые слова:* ультразвук, периодические и импульсные сигналы, нелинейные эффекты, фокусированные пучки, нелинейное поглощение, нелинейная рефракция.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование фокусировки импульсных и периодических сигналов большой амплитуды является важным направлением нелинейной акустики [1]. Интерес к этой тематике, в частности, связан с различными медицинскими приложениями мощного ультразвука. Фокусированные импульсные ударно-волновые пучки используются, например, в литотрипсии [2] для разрушения почечных камней, а периодические волны – в неинвазивной хирургии для разрушения опухолей мягких тканей [3, 4]. Эффективность этих процедур сильно зависит от режима работы излучателя: количества и формы генерируемых импульсов, их амплитуды и длительности. Для выбора наиболее оптимального режима работы излучателя необходимо уметь предсказывать параметры создаваемых полей, а также вызываемые ими биологические эффекты. Необходимо также учитывать, что увеличение амплитуды волны при фокусировке сопровождается усилением нелинейных эффектов и приводит к формированию ударных фронтов в фокальной области пучка. При сильном

проявлении нелинейных эффектов наблюдается эффект насыщения – параметры акустического поля в фокусе излучателя перестают зависеть от амплитуды давления на источнике.

Механизмы, вследствие которых возникает насыщение, различны для периодических и импульсных полей. Это приводит к тому, что предельные значения параметров акустического поля в фокусе будут также отличаться для периодических и импульсных режимов фокусировки. Например, часто в медицинских приложениях требуется получить высокое значение пикового положительного или пикового отрицательного давления в фокусе излучателя. В слабонелинейном случае для этого достаточно увеличивать амплитуду давления на излучателе. Однако если нелинейные эффекты в среде являются существенными, то увеличение давления на излучателе не обеспечит увеличение давления в фокусе излучателя вследствие проявления эффекта насыщения. Тогда для достижения более высокой амплитуды давления в фокусе можно использовать на источнике сигнал другой

временной структуры. В данной работе проводится сравнение эффективности фокусировки пучков импульсных и периодических волн, а также физических механизмов, вследствие которых возникает насыщение в исследуемых полях.

Явления ограничения величины давления в фокусе периодических и импульсных пучков описаны в обзорах [5, 6]. Эффекты насыщения в периодических полях, создаваемых поршневыми фокусированными излучателями, подробно исследовались как аналитически в приближении геометрической акустики [7], так и численно с учетом нелинейных и дифракционных эффектов [8]. Для описания нелинейных звуковых пучков в доразрывном режиме использовалась модель гауссовского пучка [9], в рамках которой удается значительно упростить аналитические выкладки. Модель мощного излучателя с аподизацией, близкой к гауссовской, также представляет интерес для практики [2]. Отметим, что эффекты насыщения для фокусированных излучателей с гауссовской пространственной аподизацией исследованы гораздо менее полно, чем для поршневых излучателей. Известны результаты, полученные в приближении геометрической акустики, то есть без учета дифракционных эффектов. Так, например, в работе [10] для описания нелинейных эффектов в сфокусированном пучке рассматривается распространение волны в лучевой трубке, площадь сечения которой меняется с расстоянием так же, как и сечение линейного гауссовского пучка. Подобный подход позволил сделать аналитическую оценку давления насыщения для периодического акустического поля. Кроме периодических волн интерес также представляют и импульсные сигналы, используемые в литотрипсии [2]. В работе [11] на основе анализа фокусировки импульсного гауссовского пучка в предположении отсутствия дифракции получены оценки предельного значения давления в фокусе излучателя, а также размеров фокальной области. Однако полученные оценки являются приближенными. Для получения более точных количественных результатов необходимо в дополнении к нелинейным эффектам учесть также дифракционные эффекты и эффекты термовязкого поглощения. Уравнения, учитывающие перечисленные выше эффекты, не имеют аналитического решения и поэтому требуют численного анализа.

Численное моделирование фокусировки ударных импульсов является более сложной задачей по сравнению с моделированием периодических волн, поскольку отличается повышенными требованиями к вычислительным ресурсам. В частности, при одинаковых шагах временной и пространственной сетки для моделирования фокусировки импульсных сигналов необходимо использовать временные окна большего размера (более чем в 10 раз для слабосфокусированных пучков). Это приводит к увеличению необходимой для расчетов оперативной

памяти и к соответствующему увеличению времени расчетов даже в случае линейного распространения. Численное описание фокусировки импульсов в нелинейном режиме стало возможным только в последнее время благодаря стремительному развитию вычислительной техники, а также благодаря развитию методов параллельных вычислений.

В данной работе с использованием уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова проводится моделирование периодических и импульсных акустических полей, создаваемых фокусированными излучателями с гауссовской пространственной аподизацией. Форма волны на излучателе выбирается в виде одиночного импульса либо гармонической волны. Рассчитываются временные профили волн в фокусе излучателя, причем фокусом считается точка, в которой достигается максимум пикового положительного давления акустического поля. Сравняются двумерные пространственные распределения пикового положительного и отрицательного давлений для периодических и импульсных полей, кривые насыщения, а также зависимости энергии пучков от расстояния до излучателя. Результаты получены для различных значений линейного коэффициента усиления и амплитуды давления на излучателе, в том числе для значений, используемых на практике [2]. Проводится сравнение полученных численных решений между собой и с известными аналитическими оценками.

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Нелинейное распространение фокусированных акустических волн можно описать с помощью уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова, учитывающего нелинейные эффекты, дифракцию и поглощение. Для аксиально-симметричных пучков в безразмерных переменных уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{4G} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right), \quad (1)$$

где  $P = p/p_0$  — акустическое давление, нормированное на исходную амплитуду волны  $p_0$  на источнике;  $\sigma = x/F$  — координата вдоль оси пучка, нормированная на фокусное расстояние  $F$ ;  $\rho = r/a_0$  — поперечная координата, нормированная на радиус излучателя  $a_0$ ;  $\theta = 2\pi\tau/T_0$  — безразмерное время;  $\tau = t - x/c_0$  — время в бегущей системе координат;  $c_0$  — скорость звука в воде;  $T_0$  — длительность импульса (в случае гармонической волны это длительность одного ее периода). Уравнение (1) содержит три безразмерных параметра:  $N = 2\pi F \epsilon p_0 / \rho_0 c_0^3 T_0$  — параметр нелинейности, где  $\epsilon$  — коэффициент нелинейности среды,  $\rho_0$  — плотность среды,  $G = \pi a_0^2 / c_0 F T_0$  — параметр дифракции и  $A$  — параметр поглощения.

Начальные условия выбирались таким образом, чтобы в случае линейной фокусировки профили волн в фокусе для импульсного и периодического

полей были одинаковыми и достигались одинаковые значения пикового положительного давления  $P_+$  (рис. 1). В качестве исходного периодического сигнала была выбрана гармоническая волна:

$$P_0(\theta) = \sin \theta. \quad (2)$$

Импульсный режим моделировался периодической последовательностью импульсов большой скважности в виде одного периода гармонической волны, а давление между импульсами считалось постоянным. При этом среднее по временному окну значение сигнала было равно нулю:

$$P_0(\theta) = \begin{cases} 1 - 1/n_0 - \sin \theta, & \pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2, \\ -1/n_0, & \theta \leq \pi/2 \text{ и } \theta \geq 5\pi/2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $2\pi n_0$  — длина временного окна, а  $n_0$  — целое число (в случае  $G = 10$  выбиралось значение  $n_0 = 13$ ). Выбор начального профиля импульса в виде одного периода гармонической волны был удобен для дальнейшего сравнения фокусировки периодических и импульсных полей в нелинейном случае.

Граничное условие задавалось на плоскости  $\sigma = 0$  и соответствовало круглому фокусированному излучателю с гауссовской аподизацией. Фокусировка пучка обеспечивалась введением фазового сдвига, квадратично растущего с поперечной координатой:

$$P(\sigma = 0, \rho, \theta) = P_0(\theta + G\rho^2) \exp(-\rho^2). \quad (4)$$

В численном алгоритме для решения уравнения (1) с граничным условием (4) и начальными временными профилями (2), (3) на каждом шаге сетки по координате  $\sigma$  использовался метод расщепления по физическим факторам и частотно-временной подход для описания различных эффектов. Дифракционные эффекты рассчитывались в спектральном представлении с помощью схемы Кранка–Николсона второго порядка точности по обеим пространственным координатам [8]. Учет диссипативных эффектов производился также в спектральном представлении с использованием точного решения для каждой из гармоник [12]. Нелинейные эффекты рассчитывались во временном представлении. Для этого использовался консервативный численный алгоритм типа Годунова второго порядка точности по времени и первого порядка точности по координате распространения [13]. Данный алгоритм позволяет описывать распространение нелинейных волн с ударными фронтами даже в том случае, когда на ударный фронт волны приходится всего 3–4 узла временной сетки. Переход между спектральным и временным представлениями осуществлялся с помощью быстрого преобразования Фурье. Алгоритм был адаптирован для параллельных вычислений с помощью технологии OPENMP, что позволило существенно сократить время расчетов. Для численного моделирования фокусированного пучка были выбраны следующие значения параметров в уравнении (1):  $G = 10, 20, 40$ ;  $0 \leq N \leq 6$ . Реальным

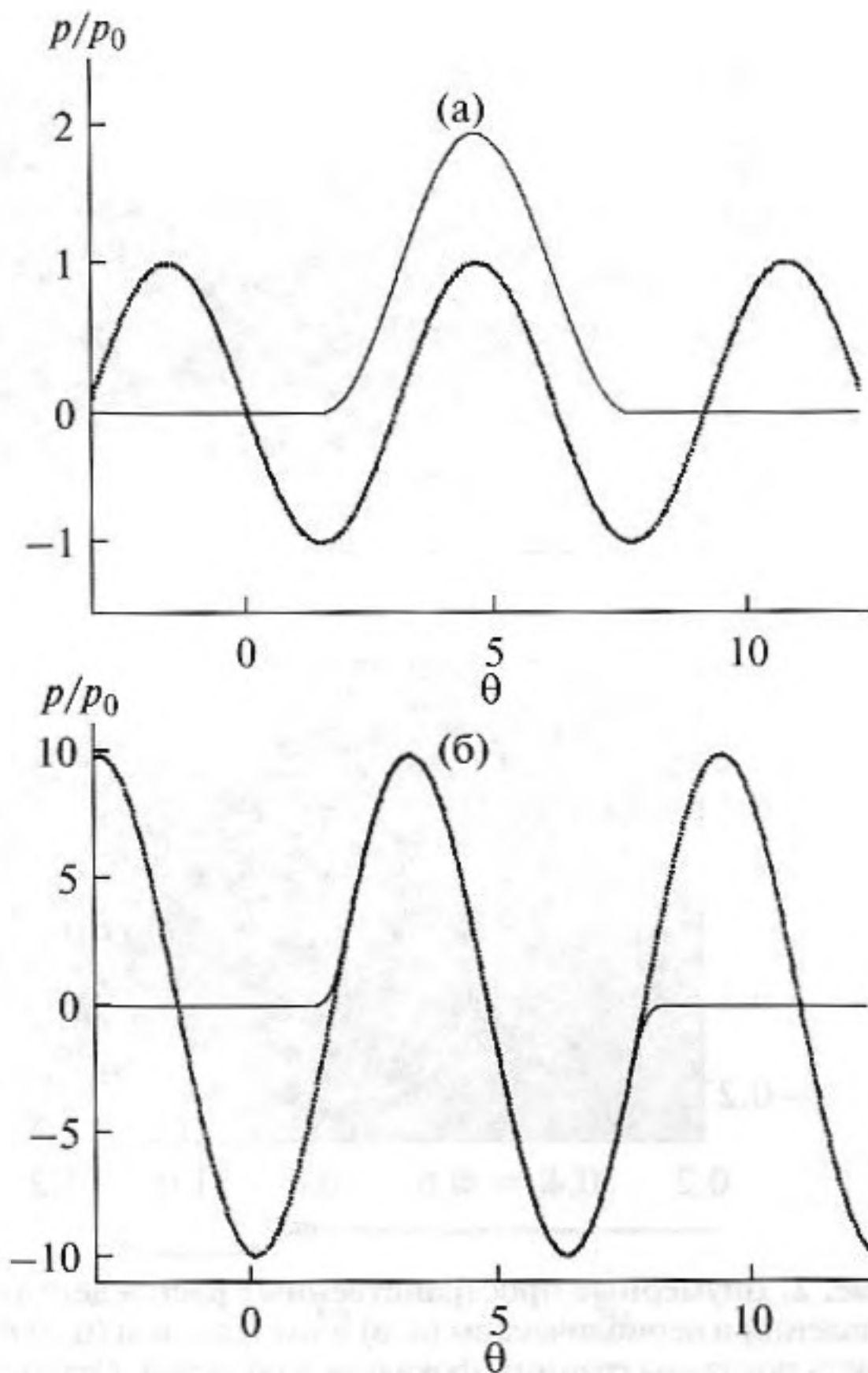
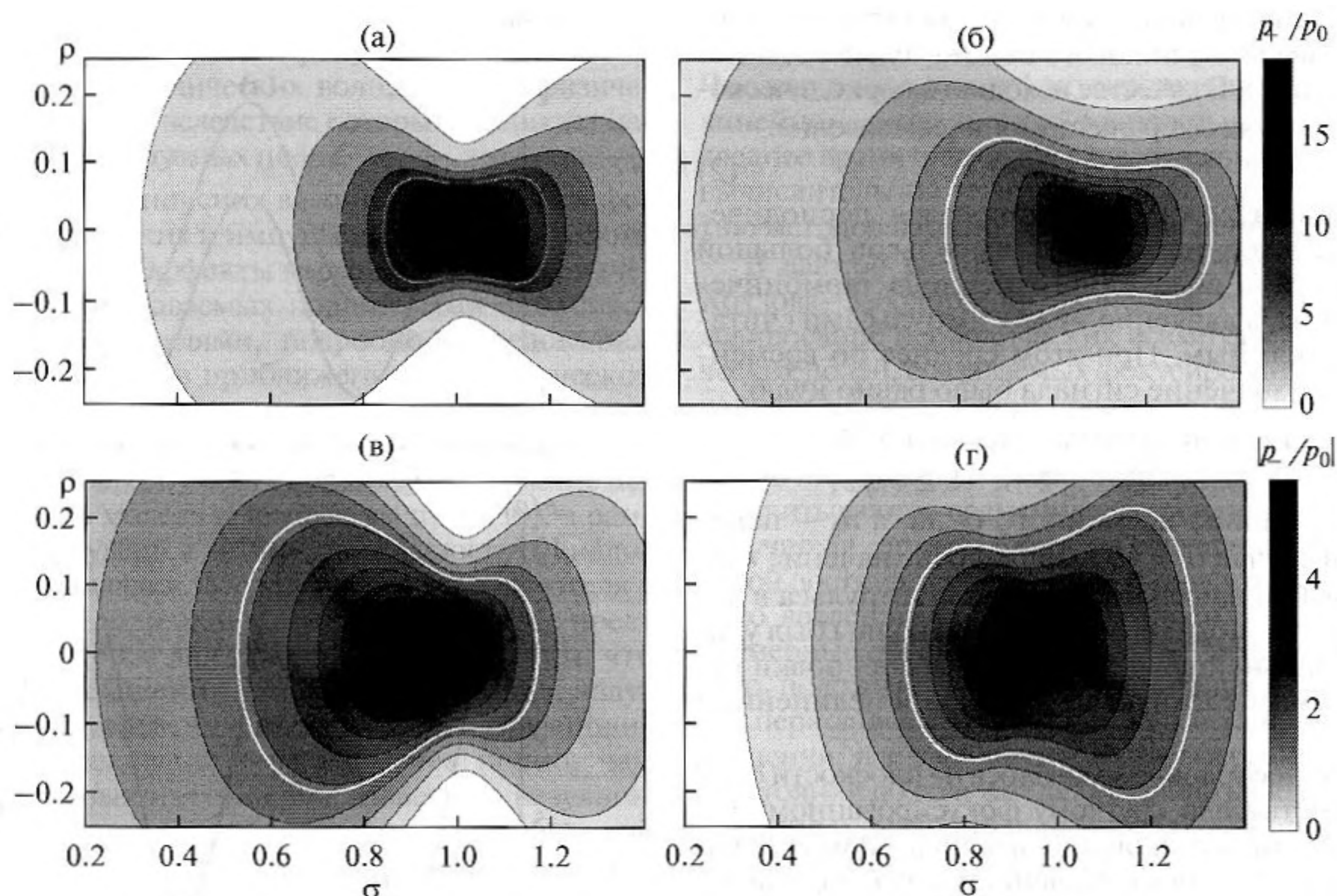


Рис. 1. Профили волн на излучателе (а) и в фокусе излучателя (б) при линейной фокусировке с коэффициентом концентрации  $G = 10$ . Сплошная линия соответствует импульсному сигналу, а штрих-пунктирная — периодической волне.

электроразрядным источникам, используемым в литотрипсии, примерно соответствуют следующие физические параметры: эффективный радиус отражателя  $a_0 = 77$  мм, эффективное фокусное расстояние  $F = 128$  мм, амплитуда давления  $p_0 = 6$  МПа и длительность излучаемого импульса  $T_0 = 4$  мкс (литотриптер Dornier HM3 [2]). Безразмерные параметры в уравнении (1) при этом принимают следующие значения:  $G = 14$  и  $N = 1.4$ . В данной работе основные результаты численных расчетов будут представлены для значений  $G = 10$  и  $N = 1.0$ , которые близки к реальным значениям, используемым в литотриптерах. В случае периодических полей указанные значения также являются типичными, например, в задачах терапии мягких тканей с использованием медицинских ультразвуковых преобразователей [3].

Параметры численной схемы подбирались исходя из условий устойчивости численного алгоритма и заранее задаваемой точности расчета (2%). Точность расчета оценивалась исходя из сравнения решений, полученных при изменении шагов дискретизации в



**Рис. 2.** Двумерные пространственные распределения пикового положительного (а, б) и пикового отрицательного (в, г) давлений в периодическом (а, в) и импульсном (б, г) фокусированных полях ( $G = 10$ ,  $N = 1.0$ ). Замкнутыми кривыми белого цвета показаны границы фокальных областей. Оттенками серого показаны уровни пикового положительного (а, б) и пикового отрицательного (в, г) давлений.

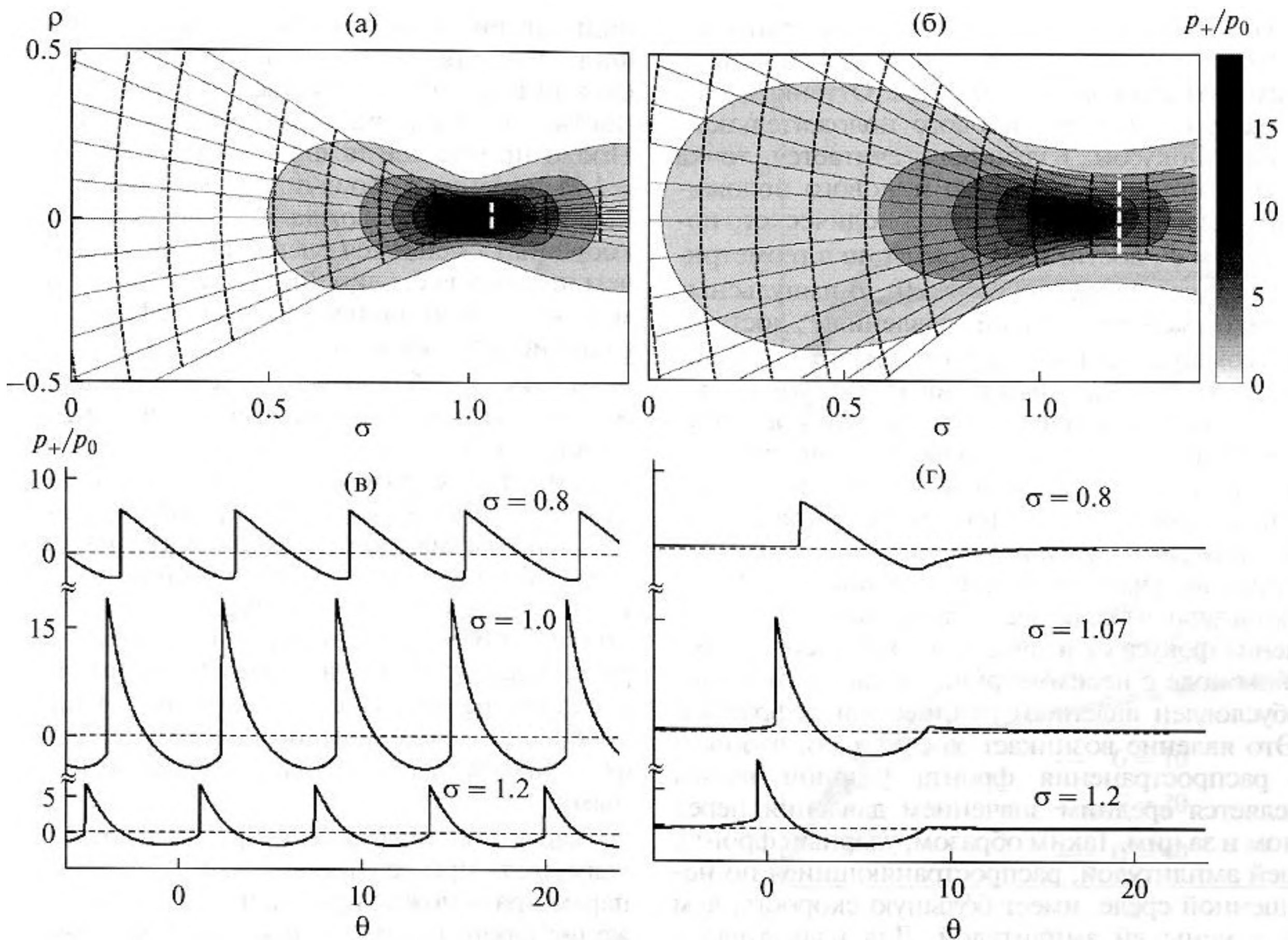
2 раза. Если при этом решения отличались менее чем на 2%, то шаг дискретизации выбирался равным текущему. Дифракционный шаг вдоль координаты распространения составил  $h_\sigma = 10^{-3}$ , шаг по поперечной координате  $h_\rho = 4 \times 10^{-4}$ . Для того чтобы выполнить условие Куранта–Фридрихса–Леви в схеме типа Годунова для нелинейного оператора, внутри каждого дифракционного шага вдоль координаты распространения выполнялось несколько шагов по нелинейности, размер которых  $h_{\sigma\_nonl}$  подбирался автоматически на каждом дифракционном шаге  $h_\sigma$  и изменялся в пределах  $7 \times 10^{-5} \leq h_{\sigma\_nonl} \leq 3 \times 10^{-4}$ . Шаг временной дискретизации или количество учитываемых в расчете гармоник также изменялись по мере распространения волны. Начальное количество гармоник при фокусировке периодической волны было равно  $n = 128$ , а при фокусировке импульса  $n = 128n_0$ . Такое количество гармоник оказалось достаточным для описания фокусировки волны с выбранной точностью в линейных и слабонелинейных случаях ( $N < 0.1$ ). По мере распространения волны и соответствующего нелинейного укручения волнового фронта учитываемое количество гармоник увеличивалось. В фокальной области при расчете распространения ударных фронтов использовалось 2048 гармоник для периодической волны и 8192 гармоники в случае импульсного сигнала. Таким обра-

зом, минимальный временной шаг для импульсного поля составил  $h_\theta = 5 \times 10^{-3}$ , а для периодического поля –  $h_\theta = 1.5 \times 10^{-3}$ . Для сглаживания больших градиентов поля в поперечном направлении, приводящих к расходимости алгоритма, вводилось искусственное поглощение [14]. Его величина подбиралась из условия, чтобы на ударный фронт волны в фокусе приходилось не менее трех узлов временной сетки. При этом вблизи от источника поглощение было мало и увеличивалось по мере приближения к геометрическому фокусу источника. В фокальной области пучка искусственное поглощение увеличивалось до 10 раз при  $G = 10$  и до 40 раз при  $G = 40$ . Минимальное значение коэффициента поглощения составляло  $A = 5.4 \times 10^{-3}$ .

При численном моделировании задачи использовались априорные знания о фокусированной геометрии пучка. Так, в районе фокуса расчет по поперечной координате проводился только по области, где пиковое положительное давление превышало 0.06% от своего максимального значения.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлены двумерные картины пространственных распределений пикового положительного (а, б) и пикового отрицательного (в, г) дав-



**Рис. 3.** Верхний ряд: лучевые картины для периодического (а) и импульсного (б) полей. Сплошными линиями нарисованы лучи, пунктиром – волновые фронты. Белым пунктиром отмечено положение фронта в точке его выпрямления на оси. Оттенками серого показаны уровни пикового положительного давления ( $G = 10, N = 1.0$ ). Нижний ряд: временные профили волн на оси излучателя на различных расстояниях  $\sigma$  в случае периодического (в) и импульсного (г) полей.

лений в нелинейном пучке ( $G = 10, N = 1.0$ ) для периодического (а, в) и импульсного (б, г) полей. Геометрическому фокусу излучателя соответствует расстояние  $\sigma = 1$  (излучатель находится слева при  $\sigma = 0$ ). Хорошо видно, что в периодическом поле достигаются бóльшие значения как пикового положительного, так и пикового отрицательного давления по сравнению с соответствующими значениями в импульсном поле. В то же время фокальная область пикового положительного давления периодического поля является более компактной как в продольном, так и в поперечном направлении. На рис. 2 границы фокальной области определены по уровню  $e^{-1}$  от максимального давления в каждом поле и отмечены замкнутой кривой белого цвета. Таким образом, если целью фокусировки является достижение высоких значений пикового положительного и отрицательного давлений, то предпочтительным является использование не импульсных, а периодических фокусированных пучков.

Для описания кавитационных эффектов важно знать распределение пикового отрицательного давления  $P_-$ . Как видно из рис. 2, фокальное пятно для  $P_-$  имеет несимметричную форму в виде несимметричной гантели, большего размера в направлении источника для периодического поля (рис. 2в) и в противоположном направлении – для импульсного поля (рис. 2г). Это отличие связано с тем, что в начальном профиле импульса отсутствует фаза разрежения, она появляется только вдали от излучателя вследствие проявления дифракционных эффектов. Центр фокальной области пикового отрицательного давления для обоих полей смещен в сторону излучателя – максимум абсолютной величины пикового отрицательного давления достигается при  $\sigma \approx 0.95$ .

На рис. 3 представлены лучевые картины для периодического (а) и импульсного (б) нелинейных полей при значениях параметров  $G = 10, N = 1.0$ . Пунктиром показаны волновые фронты, которые в каждой точке пространства определялись по максимуму производной от временного профиля волны в

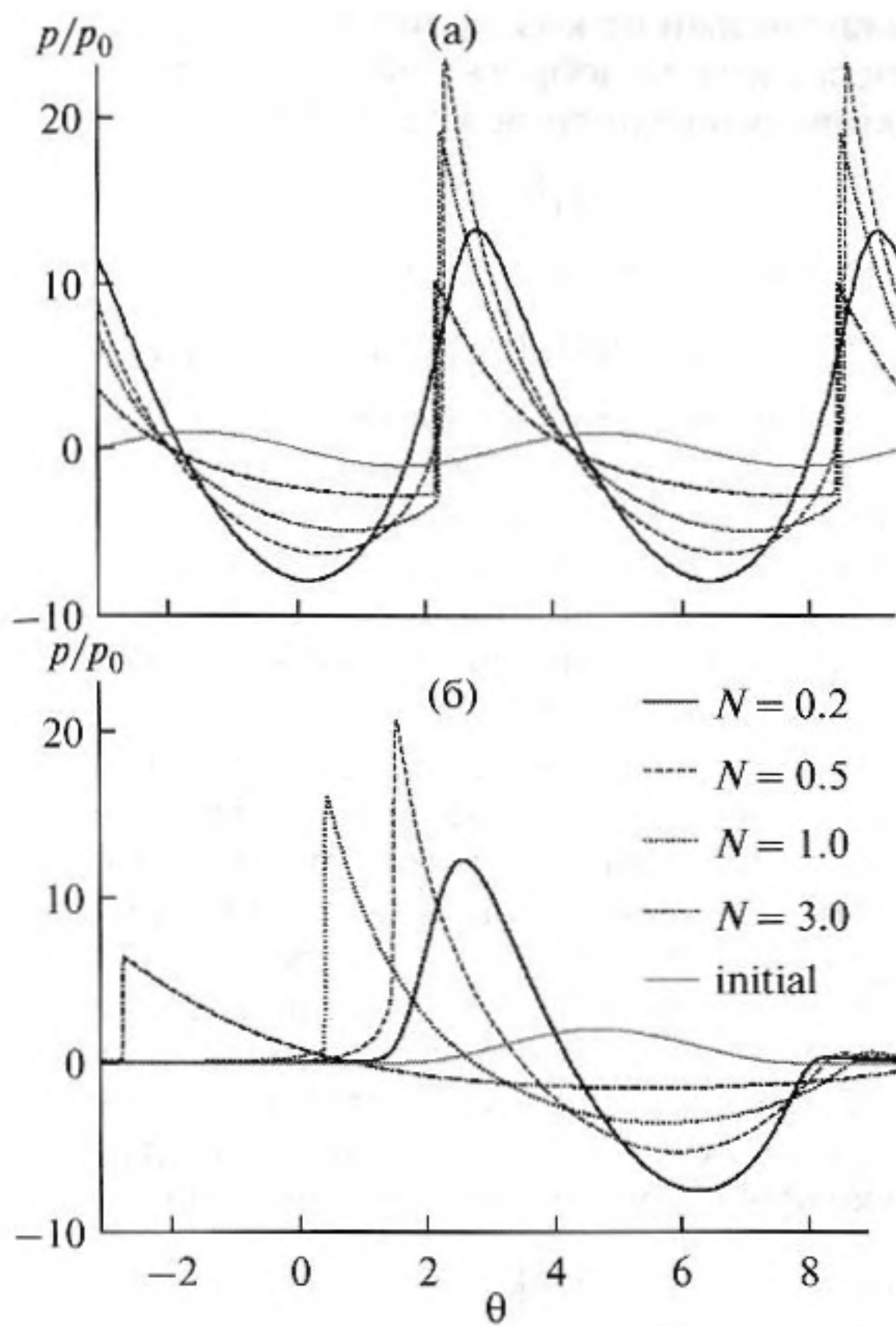
этой точке. Сплошными линиями нарисованы лучи, построенные как перпендикуляры к волновым фронтам в размерных координатах. Оттенками серого показаны уровни пикового положительного давления. Фокусом излучателя считается точка пространственного максимума пикового положительного давления поля  $P_+$ . Для периодического поля максимум  $P_+$  достигается примерно в геометрическом фокусе излучателя ( $\sigma = 1.0$ ). В импульсных полях максимальное значение давления  $P_+$  достигается за геометрическим фокусом при  $\sigma \approx 1.1$ . В линейном случае максимум пикового положительного давления для периодического и импульсного поля достигается при  $\sigma \approx 0.98$ , небольшое смещение фокуса в сторону к излучателю в этом случае возникает вследствие проявления дифракционных эффектов [1]. Таким образом, положение фокуса оказывается различным в случаях линейной и нелинейной фокусировки и зависит от временной структуры сигнала. Смещение фокуса от излучателя в нелинейном импульсном поле с несимметричным ударным фронтом обусловлено явлением нелинейной рефракции [11]. Это явление возникает за счет того, что скорость распространения фронта ударной волны определяется средним значением давления перед фронтом и за ним. Таким образом, ударный фронт с большей амплитудой, распространяющийся по невозмущенной среде, имеет большую скорость, чем фронт с меньшей амплитудой. Для излучателя с гауссовской пространственной аподизацией скорость фронта на оси импульсного пучка превышает скорость фронта на периферии, что приводит к локальной дефокусировке пучка. В периодических полях явление нелинейной рефракции выражено значительно слабее, чем в импульсных полях. Это связано с тем, что ударный фронт, формирующийся в исходно гармонической волне, остается почти симметричным относительно нуля вплоть до приближения к фокусу. На рис. 3в показаны временные профили волн периодической волны на оси излучателя и на различных расстояниях  $\sigma$  от него. Видно, что при  $\sigma = 0.8$  профиль периодической волны еще симметричен относительно нуля, а значит, скорость фронта в бегущей системе координат близка к нулю. Профиль импульса при том же значении  $\sigma$  (рис. 3г) таков, что слева от ударного фронта возмущение давления равно нулю; поэтому ударный фронт импульса распространяется с большей скоростью, чем фронт пилообразной волны, а значит, явление нелинейной рефракции для импульсного поля выражено сильнее. Влияние нелинейной рефракции в периодических полях является существенным только в области фокуса, когда профиль волны становится асимметричным (профиль при  $\sigma = 1.0$ ). Для импульсных полей влияние нелинейной рефракции становится существенным сразу после образования ударного фронта. Профили, построенные при  $\sigma = 1.0$  и  $\sigma = 1.07$ , соответствуют фокусам периодического (в) и импульсного (г) полей. Как

видно из рисунка, максимальное давление в профиле периодической волны выше, чем у импульса, а длительность импульса превышает длительность одного периода периодической волны. После прохождения фокуса (профили при  $\sigma = 1.2$ ) давление в обоих полях уменьшается, а ударный фронт в сопровождающей временной системе координат смещается влево (т.е. приходит раньше, чем приходила бы линейная волна) вследствие совместного влияния нелинейной рефракции и дифракционных эффектов.

На рис. 3а, 3б белым пунктиром показаны волновые фронты периодического и импульсного полей в точках его выпрямления на оси. Хорошо видно, что выпрямление волнового фронта происходит за фокусом, а значит, в области достижения максимума пикового положительного давления волновой фронт является еще сходящимся. Выпрямление волнового фронта в импульсном поле (б) происходит дальше от фокуса, чем в периодическом поле (а). Эта особенность также обусловлена явлением нелинейной рефракции, которое выражено намного слабее в периодических фокусированных пучках по сравнению с импульсными.

Характерное искажение профилей волн в фокусе излучателя при различных значениях нелинейного параметра  $N$  можно проследить на рис. 4а, 4б. Положение фронта гармонической волны меняется незначительно, тогда как фронт импульса вследствие нелинейной рефракции сильно смещается влево. С увеличением нелинейного параметра  $N$  длительность импульса увеличивается, а длительность одного периода непрерывной волны не меняется, причем исходно гармоническая волна становится пилообразной. При значении коэффициента линейной фокусировки  $G = 10$  разрыв в периодической волне и в импульсе в области фокуса начинает образовываться при  $N = 0.5$ . В слабонелинейном случае (при  $N < 0.5$ ) с ростом нелинейного параметра  $N$  величина безразмерного пикового положительного давления в импульсном и периодическом полях увеличивается, а затем, после образования ударного фронта (при  $N > 0.5$ ), уменьшается за счет поглощения на образовавшемся разрыве. До образования разрыва (при  $N < 0.5$ ) фаза сжатия импульса укорачивается, а затем при  $N > 0.5$  — удлиняется. Фаза разрежения импульса монотонно увеличивается с ростом  $N$ . В периодической волне, по мере усиления нелинейных эффектов, фаза сжатия укорачивается, а фаза разрежения удлиняется, однако эти изменения выражены гораздо слабее по сравнению с импульсом.

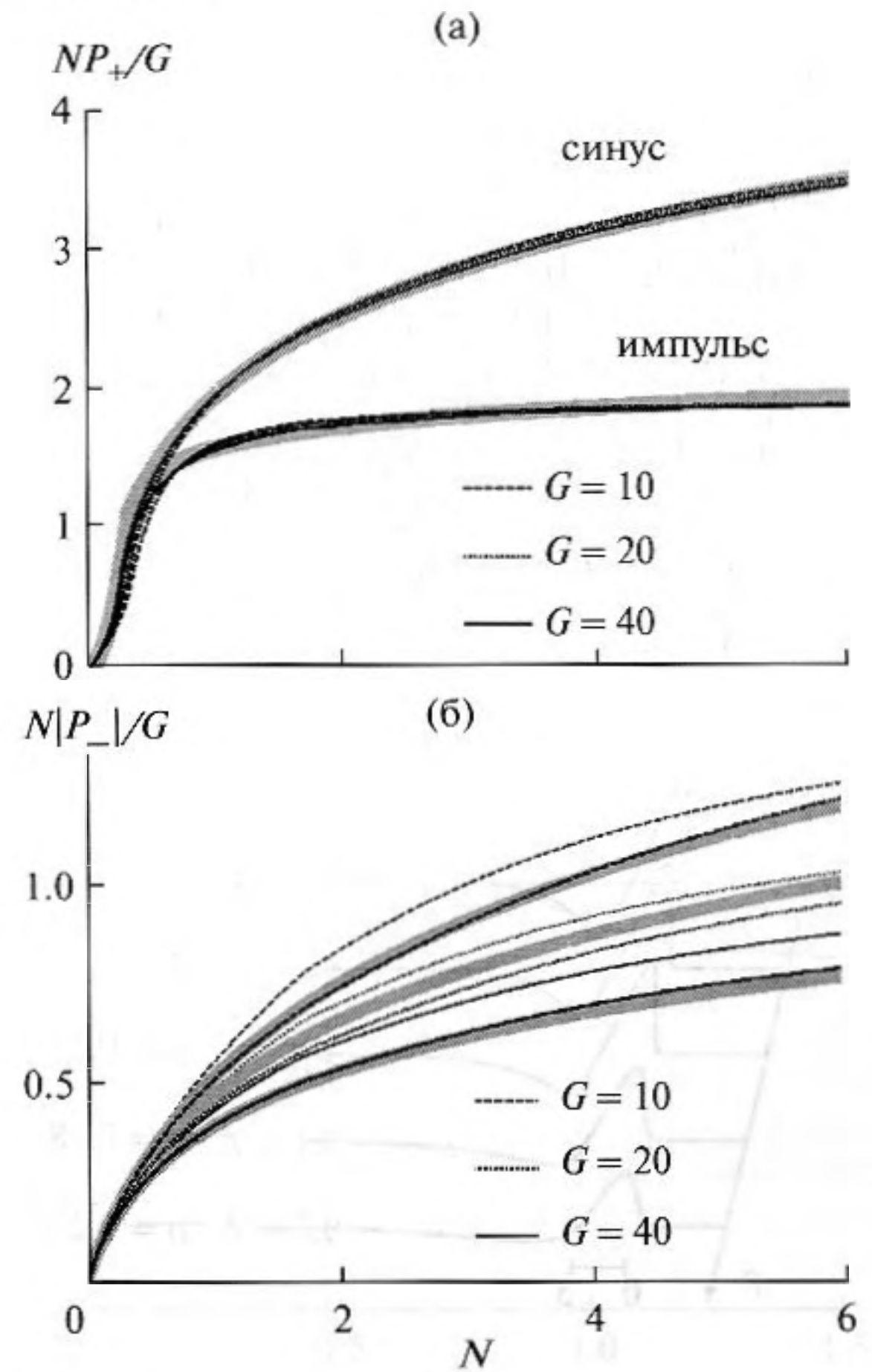
На рис. 5а представлены кривые насыщения пикового положительного давления периодического и импульсного полей. Кривые насыщения для периодического поля показаны серым, а для импульсного поля — черным цветом. Будем считать, что насыщение достигается с того момента,



**Рис. 4.** Профили в фокусе (в точке максимума пикового положительного давления) для периодического (а) и импульсного (б) сигналов при значении коэффициента концентрации  $G = 10$  и различных значениях нелинейного параметра  $N = 0.2, 0.5, 1.0, 3.0$ . Сплошными серыми линиями показаны профили волн на излучателе.

когда производная кривой насыщения составляет 5% от своего максимального значения. В этом случае для периодического поля насыщение пикового положительного давления происходит при  $N = 5$ , а для импульсного поля — при  $N = 1.5$ . Таким образом, насыщение в импульсных полях наступает раньше, чем в периодических полях, то есть при меньших значениях нелинейного параметра  $N$ , а значит при меньших значениях давления на излучателе. В слабонелинейном режиме (при  $N < 0.5$ ) кривые насыщения для периодического и импульсного полей близки друг к другу, то есть поля имеют близкие значения положительных и отрицательных давлений (рис. 5а, 5б). При больших значениях коэффициента нелинейности  $N$  пиковое положительное давление и модуль пикового отрицательного давления в периодическом поле больше, чем в импульсном. Для пиковых отрицательных давлений насыщение в интервале исследуемых параметров  $N$  не наблюдается (рис. 5б).

Оценить максимальное значение амплитуды давления в импульсном поле позволяет следующая



**Рис. 5.** Кривые насыщения для пикового положительного (а) и пикового отрицательного (б) давлений. Серым цветом представлены зависимости для периодического поля, черным — для импульсного. Толстыми светло-серыми линиями показаны кривые насыщения, построенные с помощью аппроксимаций (9)–(11). На графике (а) справа от легенды серым цветом показаны уровни насыщения, рассчитанные с помощью аналитического решения (8).

формула, полученная в работе [11] в приближении нелинейной геометрической акустики:

$$P_{\max} \approx 1.5 p_{\text{вн}} \alpha^2, \tag{5}$$

где  $p_{\text{вн}} = \frac{c_0^2 \rho_0}{2\epsilon}$  — внутреннее давление среды,  $\alpha$  — угол раскрытия апертуры излучателя при фокусировке,  $\alpha \approx a_0/F$ . В безразмерном виде данная формула записывается следующим образом:

$$NP_+/G \approx 1.5. \tag{6}$$

Как видно из рис. 5а, для пикового положительного давления импульсных полей численно рассчитанный уровень насыщения равен  $NP_+/G \approx 1.9$ . Таким образом, предсказанное с помощью формулы (6) давление насыщения в импульсных полях оказывается на  $\approx 20\%$  меньше, чем рассчитанное при более точном описании с учетом дифракционных эффектов. Интересно, что, как и в решении (5) уравнений

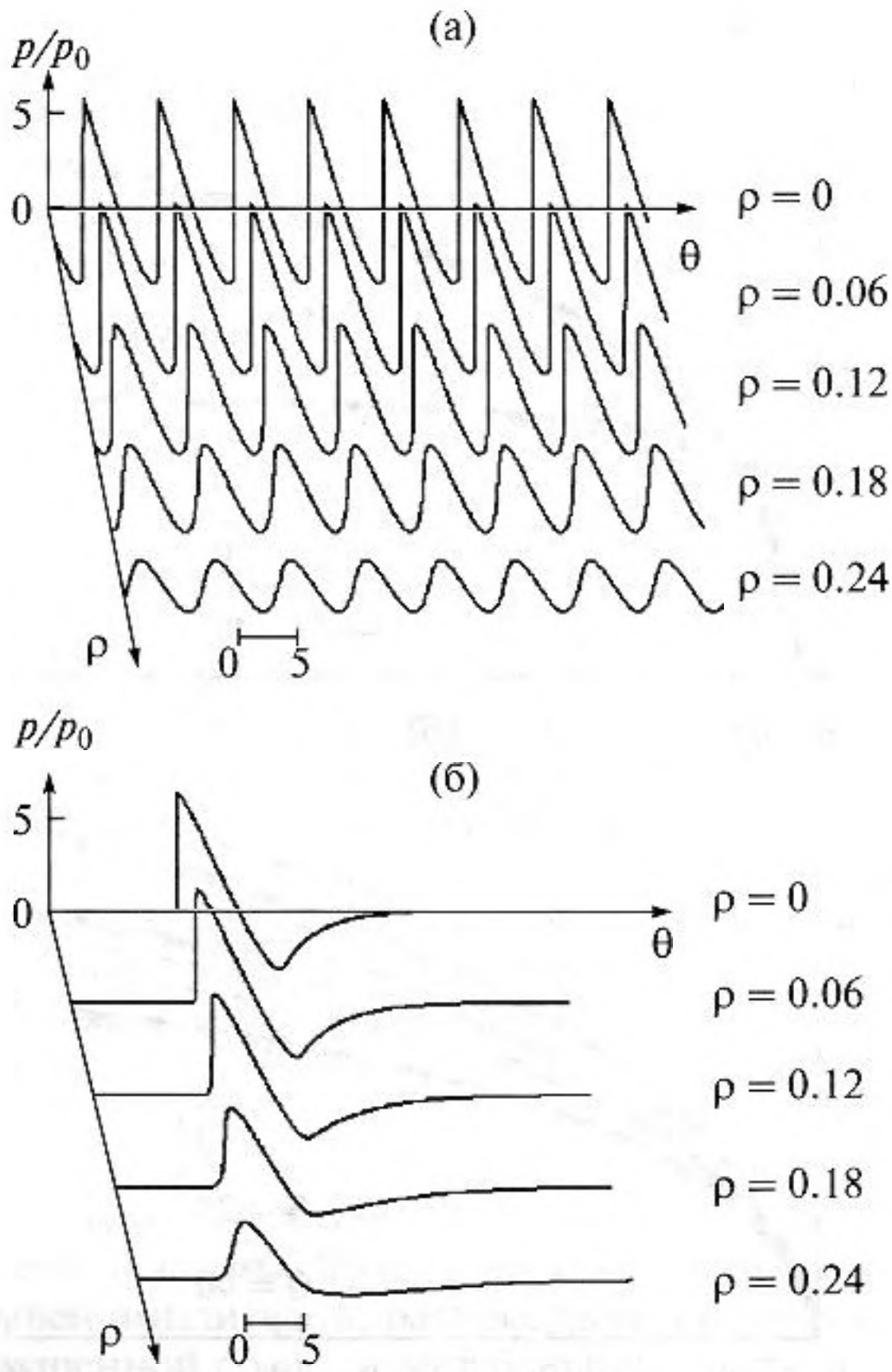


Рис. 6. Временные профили волн на различных поперечных расстояниях  $\rho$  от оси излучателя при  $\sigma = 0.8$  в случае периодического (а) и импульсного (б) полей.

геометрической акустики, давление насыщения оказалось не зависящим от величины параметра  $G$ , то есть от начальной длительности импульса.

Аналитическое выражение для оценки давления в фокусе излучателя периодических волн получено в работе [10]:

$$p_F = \frac{\pi p_{\text{вн}} \alpha^2}{\ln(2p_F/p_0)}. \quad (7)$$

Формулу (7) можно записать в безразмерном виде для пикового положительного давления как:

$$NP_+/G = \frac{\pi}{\ln(2G)}. \quad (8)$$

Полученные с помощью этой формулы величины давления насыщения для разных значений линейного параметра фокусировки  $G$  показаны серым цветом справа от легенды на рис. 5а. Как видно, при  $N = 6$  приближенная формула (8) дает примерно в 3 раза меньшую величину давления, чем полученную в численных расчетах для периодического поля.

Поскольку кривые насыщения пикового положительного давления (рис. 5а, 5б) в периодическом и импульсном полях оказались практически

не зависящими от коэффициента фокусировки  $G$ , это позволило подобрать удобные аппроксимации для кривых насыщения в периодическом поле:

$$NP_+/G = \min(10N^2, 2.15 \lg(7N + 1)), \quad (9)$$

и в импульсном поле:

$$NP_+/G = \min(10N^2, 0.4 \lg(N - 0.28) + 1.64). \quad (10)$$

На рис. 5а, 5б кривые, построенные с помощью этих аппроксимаций, показаны толстыми светлыми линиями. Видно, что в обоих случаях квадратичный рост пикового положительного давления в слабонелинейном случае сменяется медленным логарифмическим ростом, который и описывает насыщение.

Аналогичная аппроксимация была также подобрана для оценок предельных пиковых отрицательных давлений. Вследствие того, что значения пикового отрицательного давления в периодическом и импульсном полях близки, для обоих полей подбиралась одинаковая аппроксимация. В отличие от кривых насыщения пикового положительного давления, значения пикового отрицательного давления при данном  $N$  оказались зависящими от линейного коэффициента концентрации поля  $G$ :

$$N|P_-|/G = \frac{\lg \left[ \left( \frac{G}{13} + 1.2 \right) N + 1 \right]}{\frac{G}{33} + 0.61}. \quad (11)$$

На рис. 6а, 6б показаны временные профили волн на различных поперечных расстояниях  $\rho$  от оси излучателя и на расстоянии  $\sigma = 0.8$  от самого излучателя. Видно, что даже на небольшом расстоянии от оси ( $\rho = 0.24$ ) пучка профили волн практически не искажены, хотя на оси излучателя, как в периодическом (а), так и в импульсном (б) поле, образуется ударный фронт.

Бóльшие значения пикового положительного давления в периодических полях (рис. 5а) качественно можно объяснить следующим образом. Вследствие гауссовской пространственной аподизации амплитуды давления на излучателе, пиковое давление в волнах, приходящих от его центральной части, будет больше, чем от волн, приходящих с периферии излучателя. Поскольку нелинейные эффекты проявляются сильнее для волн с бóльшей амплитудой, то когда в волнах от центральной части излучателя уже образуется разрыв, волны, приходящие от периферии излучателя, будут искажены гораздо слабее (рис. 6а, 6б). В нелинейных периодических полях волны из центра излучателя и с его периферии фокусируются почти в геометрический фокус излучателя (рис. 2а). Тогда, при увеличении амплитуды давления на излучателе, в центральной области пучка происходит насыщение, но с периферии излучателя будут приходить волны, в которых насыщение еще не достигнуто. При этом давление в фокусе будет продолжать увеличиваться.

Именно поэтому кривая насыщения для периодического поля в области исследуемых параметров не выходит на постоянный уровень, величина пиковых давлений в фокусе продолжает медленно расти (рис. 5а).

В отличие от периодического поля, в импульсных полях очень существенным оказывается явление нелинейной рефракции. Вследствие нелинейной рефракции волны от центральной части излучателя будут фокусироваться за геометрическим фокусом, тогда как более слабые волны с периферии пучка будут по-прежнему приходить примерно в геометрический фокус излучателя. Таким образом, в отличие от периодического поля, в импульсном поле волны из центральной области излучателя и с краев излучателя фокусируются в разные точки и поэтому не усиливают друг друга. Это приводит к тому, что в импульсных полях кривая насыщения выходит на постоянный уровень давления, меньший чем давление в периодических пучках при той же амплитуде давления на источнике. Таким образом, ограничение максимального пикового положительного давления в импульсных полях обусловлено явлением нелинейной рефракции.

На рис. 7 представлены зависимости энергии волнового пучка от расстояния до излучателя в (а) периодическом и (б) импульсном фокусированном поле при различных значениях нелинейного параметра  $N = 0.2, 0.5, 1.0, 3.0$ . Энергия импульсного поля на произвольном расстоянии от излучателя вычислялась как интеграл по временному окну и по апертуре пучка от квадрата давления в каждой точке и нормировалась на свое исходное значение, а в качестве энергии периодической волны вычислялась энергия за один период и также нормировалась на исходное значение:

$$\frac{E}{E_0} = \iint \frac{p^2}{p_0^2} r dr dt. \quad (12)$$

Из рис. 7 видно, что вблизи излучателя энергия периодического и импульсного пучка остается постоянной. Затем, начиная с расстояния  $\sigma$ , соответствующего длине образования разрыва в профилях волн на оси пучка, энергия начинает уменьшаться за счет нелинейного поглощения на разрывах. Хорошо известно, что в плоской нелинейной волне энергия импульсного сигнала после образования разрыва убывает с расстоянием как  $1/\sigma$ , а энергия периодического возмущения — быстрее, как  $1/\sigma^2$  [1]. При этом в плоской периодической волне наблюдается эффект насыщения давления, в то время как для импульсного сигнала насыщения нет [5, 6]. Как видно на рис. 7, в случае фокусированного излучателя энергия периодического поля уменьшается с расстоянием также быстрее, чем энергия импульсного ударно-волнового поля. Таким образом, нелинейное поглощение на ударном фронте волны для фокусированных периодических полей выражено сильнее,

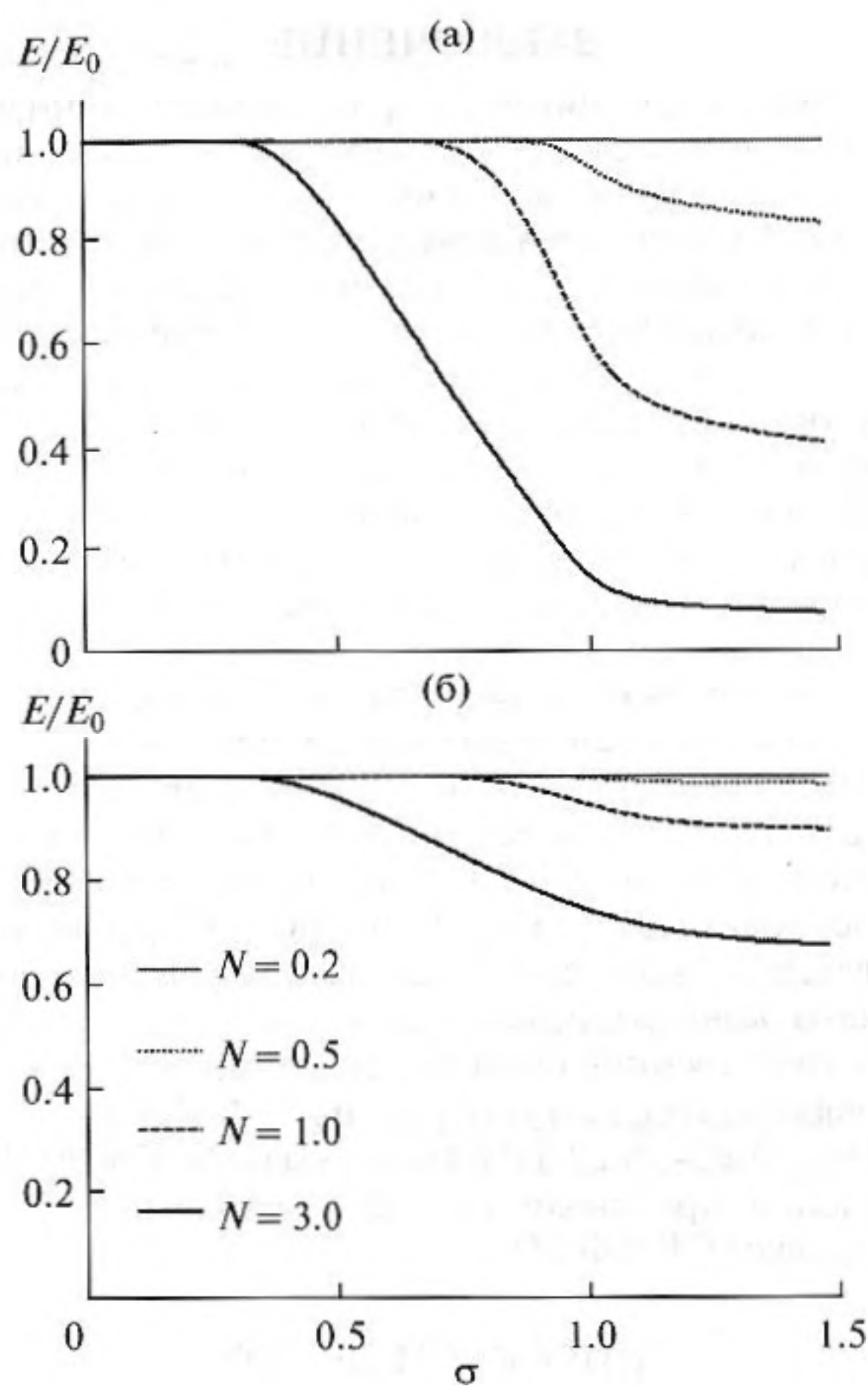


Рис. 7. Зависимость энергии волнового пучка от расстояния  $\sigma$  до излучателя в периодическом (а) и импульсном (б) полях при различных значениях нелинейного параметра  $N = 0.2, 0.5, 1.0, 3.0$ .

чем для импульсных. Это позволяет сделать вывод, что основным механизмом, приводящим к насыщению в фокусированных периодических полях, является нелинейное поглощение; влияние нелинейной рефракции проявляется только в небольшой области вблизи фокуса, и в целом, является незначительным. Для импульсных полей основным механизмом, приводящим к насыщению пикового положительного давления, является нелинейная рефракция.

Интересно отметить, что, несмотря на то, что энергия периодического пучка спадает быстрее, максимальное достижимое значение пикового положительного давления в периодическом поле больше, чем в импульсном. Эта особенность проявления нелинейных эффектов указывает на то, что импульсные пучки лучше подходят для передачи энергии волны к фокусу с меньшими потерями, а пучки периодических волн — для достижения высоких значений давления в фокальной области.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сравниваются физические механизмы, приводящие к эффектам насыщения в фокусированных периодических и импульсных полях, создаваемых излучателями с гауссовской пространственной аподизацией. Показано, что насыщение пикового положительного давления в фокусированных периодических пучках наступает вследствие нелинейного поглощения на ударном фронте волны. Насыщение давления в импульсных полях связано с проявлением эффекта нелинейной рефракции. Предельно достижимые значения пикового положительного давления в периодических полях оказались выше, чем аналогичные значения в импульсных акустических полях. Показано, что уровень насыщения пикового положительного давления в импульсном и периодическом поле не зависит от начальной длительности импульса или частоты исходной гармонической волны. Полная энергия пучка периодических волн спадает по мере удаления от излучателя быстрее, чем в случае импульсного поля, однако концентрируется в значительно меньшей пространственной области в районе фокуса.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 09-02-01530, 10-02-91062-НЦНИ и НИИ-ДК075090. Вычисления производились на суперкомпьютерном комплексе СКИФ МГУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Averkiou M.A., Cleveland R.O. Modeling of an electrohydraulic lithotripter with the KZK equation // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106. № 1. P. 102–112.
3. Хилл К., Бэмбер Дж., Тер Хаар Г. Ультразвук в медицине. Физические основы и применения. М.: Физматлит, 2008. 544 с.
4. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Каргл С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань (обзор) // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
5. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 95. № 9. С. 1011–1036.
6. Руденко О.В., Сапожников О.А. Явления самовоздействия пучков волн, содержащих ударные фронты // УФН. 2004. Т. 174. № 9. С. 973–989.
7. Наугольных К.А., Романенко Е.В. О зависимости коэффициента усиления фокусирующей системы от интенсивности звука // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 2. С. 191–195.
8. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 445–456.
9. Гамильтон М.Ф., Руденко О.В., Хохлова В.А. Новый метод расчета параксиальной области интенсивных акустических пучков // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 48–53.
10. Bacon D.R. Finite amplitude distortion of the pulsed fields used in diagnostic ultrasound // Ultrasound Med. & Biol. 1984. V. 10. № 2. P. 189–195.
11. Мусатов А.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А. Учет нелинейной рефракции и нелинейного поглощения при фокусировке мощных импульсов // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 502–510.
12. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.
13. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations // J. Comp. Phys. 2000. V. 160. P. 241–282.
14. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для терапевтических применений мощного фокусированного ультразвука // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 380–390.