

**МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКИМИ  
ЧАСТИЦАМИ С МОНОПОЛЬНЫМ ТИПОМ КОЛЕБАНИЙ,  
РАСПОЛОЖЕННЫМИ В УЗЛАХ ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКИ  
С ОДИНАКОВЫМИ ЯЧЕЙКАМИ**

© 2015 г. Ю. А. Кобелев

*Институт прикладной физики РАН  
603950 Н. Новгород, ул. Ульянова 46*

*E-mail: kobelev@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 13.05.2014 г.

Решается задача о рассеянии плоской звуковой волны безграничной трехмерной решеткой с одинаковыми ячейками, в узлах которой расположены сферические частицы с монопольным типом колебаний. Показано, что в колебаниях частиц отсутствуют радиационные потери энергии, а в случае пузырьков газа в жидкости наблюдается увеличение резонансной частоты их колебаний и монотонное уменьшение фазовой скорости распространения волны, модулирующей амплитуды колебаний пузырьков, с увеличением их концентрации. Решение проводится без введения эффективной частицы с параметрами плотности, сдвигового напряжения и радиуса, как это сделано в более ранней работе автора для средних полей амплитуд колебаний частиц.

*Ключевые слова:* звуковое поле, многократное рассеяние, сферические частицы, монополь, жидкие и упругие среды.

DOI: 10.7868/S0320791915030090

**ВВЕДЕНИЕ**

Настоящая работа является продолжением работы автора [1], где решалась задача о рассеянии звука сферическими частицами с монопольным типом колебаний, расположенными в узлах плоской безграничной сетки. Общей целью данных работ является подтверждение или опровержение результатов еще более ранней работы [2], в которой можно выделить три наиболее существенных результата. Во-первых, в среде, содержащей частицы с регулярным или статистически независимым распределением в пространстве, у волны, модулирующей средние амплитуды колебаний частиц, отсутствуют радиационные потери от рассеяния звука отдельной частицей. В результате они колеблются как бы в несжимаемой среде. Хотя качественное объяснение этого эффекта дается в монографии [3]: в среде с постоянной концентрацией частиц рассеиваемые отдельными частицами волны уничтожают друг друга всюду, кроме направления первичной волны. И, по-видимому, на основании этих же соображений в работе [4] радиационные потери просто отбрасываются. В большинстве же работ, как по теории многократного рассеяния [5, 6], так и квазигомогенной [7, 8], радиационные потери дают дополнительное затухание энергии когерентного поля и являются источником некогерентного. Но здесь воз-

никает противоречие, поскольку эти теории допускают переход и к регулярному распределению частиц в среде, где некогерентной компоненты поля нет, следовательно, нет и радиационных потерь. Источником же некогерентного поля могут быть только флуктуации концентрации частиц в среде [3]. Во-вторых, для пузырьков газа в жидкости с увеличением их концентрации резонансная частота колебаний увеличивается, стремясь к бесконечности при объемном содержании частиц около 30%, когда фазовая скорость волны, модулирующей амплитуды колебаний частиц (далее скорость амплитудной волны), становится независимой от частоты. В литературе автору не удалось найти информацию, подтверждающую или опровергающую данный вывод. И, наконец, скорость волны, модулирующей амплитуды колебаний частиц, монотонно уменьшается с увеличением концентрации пузырьков, а квазигомогенная теория [7] дает для низкочастотной скорости этой волны немонотонное поведение с минимумом вблизи 50% объемного содержания газа (подробнее об этом в [2]). Эти выводы противоречат друг другу.

Кратко поясним ключевые моменты теории, излагаемой в работе [2]. Прежде всего отметим, что задачи рассеяния звука в жидких или упругих средах с дискретными неоднородностями необ-

ходимо решать совместно с векторными и скалярными полями даже для монополярных колебаний частиц. Такой метод решения, базирующийся на сферических средних по поверхности частицы от скалярного и векторного потенциалов, предложен в работах автора [9, 10]. Вне зависимости от распределения частиц в среде (регулярное или статистически независимое) вводится эффективная сферическая частица с объемом, равным объему среды, приходящимся на одну частицу, по аналогии с работой [11], где решаются задачи рассеяния только скалярных полей в жидкости или только векторных полей в упругой среде. Далее рассматриваются монополярные колебания этой частицы в упругой среде, по аналогии с колебаниями реальной [9]. Граничные условия при этом потребовали введения эффективной сдвиговой жесткости, отличной от нуля даже в случае пузырьков газа в идеальной жидкости.

В настоящей работе предлагается решение указанной выше задачи без привлечения каких-либо гипотез, позволяющее убедительнее обосновать выводы работы [2] и справедливое, в том числе, для предельно больших концентраций частиц, вплоть до их соприкосновения.

### СУММИРОВАНИЕ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ, РАССЕЯННЫХ РЕШЕТКОЙ

Решетка составлена из  $N$  одинаковых, безграничных по координатам  $y, z$  плоских сеток, расположенных на расстоянии  $a_1$  друг от друга по оси  $x$ . Ячейка решетки представляет собой параллелепипед, сечение которого в плоскости  $y, z$  имеет форму параллелограмма со стороной  $a_2$  вдоль оси  $y$  и стороной  $a_3$ , наклоненной на угол  $\beta$  от оси  $z$ . Введение угла  $\beta$  позволяет получить предельно большие концентрации частиц на единицу площади сетки. Положение узлов решетки определяется векторами

$$\mathbf{r}_j = a_1 j_1 \mathbf{n}_x + \mathbf{r}_{\perp j}, \quad \mathbf{r}_{\perp j} = (a_2 j_2 + a_3 j_3 \sin \beta) \mathbf{n}_y + a_3 j_3 \mathbf{n}_z$$

с целыми числами  $j_1, j_2, j_3$ , изменяющимися в пределах:  $0 \leq j_1 \leq N - 1, -\infty < j_{2,3} < \infty$  и единичными векторами  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$  вдоль осей  $x, y, z$  соответственно. Положение произвольной точки определяется векторами  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp j} + \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x = x \mathbf{n}_x + y \mathbf{n}_y + z \mathbf{n}_z$  с координатами  $y$  и  $z$ , изменяющимися в пределах  $-a_2 < y < a_2, -a_3 \cos \beta < z < a_3 \cos \beta$  вокруг узловой точки  $\mathbf{r}_{\perp j}$  и координатой  $x$  в пределах  $-\infty < x < \infty$ . В узлах решетки расположены одинаковые сферические частицы радиуса  $R$  с монополярным типом колебаний под действием звука, поэтому рассеянные ими поля описываются скалярным потенциалом как в упругой среде, так и в жидкости.

Пусть на решетку падает плоская звуковая волна с гармоническим по времени потенциалом, пропорциональным  $\exp(i\omega t)$ , с амплитудой

$\psi_0(\mathbf{r}_{\perp j} + \mathbf{r}_x) = \exp[-ik(\mathbf{r}_{\perp j} + \mathbf{r}_x)]$ . Вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\perp} + k_x \mathbf{n}_x$  определяет угол падения на решетку звуковой волны, а его длина  $k = \omega/c$  – волновое число продольных звуковых волн,  $c$  – их скорость. Амплитуды колебаний частиц  $a(\mathbf{r}_j)$  и суммарного поля в среде  $\psi(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_x)$  будут пропорциональны сомножителю падающего поля  $\exp(-ik\mathbf{r}_{\perp j})$ , т.е.

$$\left\{ \begin{matrix} a(\mathbf{r}_j) \\ \psi(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_x) \end{matrix} \right\} = \exp(-ik\mathbf{r}_{\perp j}) \left\{ \begin{matrix} a(j_1) \\ \psi(\mathbf{r}_x) \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

и этот сомножитель можно исключить из дальнейших вычислений. Для поля  $\psi(\mathbf{r}_x)$  уравнение многократного рассеяния, но только уже не на частицах, а на сетках, составляющих решетку, записывается в виде [10]

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_x) = & \exp(-ik\mathbf{r}_x) + \frac{2\pi R}{a_2 a_3 \cos \beta} \times \\ & \times \sum_{j_1=0}^{N-1} a(j_1) \sum_{(m_2, m_3=-\infty)}^{\infty} (1/\sqrt{m}) \times \\ & \times \exp\{-[\sqrt{m}|x - a_1 j_1| + i(s_{m_2} y + s_{m_3} z)]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $s_{m_2} = k_y + 2\pi m_2/a_2, s_{m_3} = k_z - (2\pi m_2/a_2) \tan \beta + 2\pi m_3/a_3 \cos \beta$  – компоненты волновых векторов  $\mathbf{s}_m = s_{m_2} \mathbf{n}_y + s_{m_3} \mathbf{n}_z, \sqrt{m} = \sqrt{s_{m_2}^2 - k^2}, s_m = \sqrt{s_{m_2}^2 + s_{m_3}^2}, k_y, k_z$  – проекции вектора  $\mathbf{k}$  на плоскость  $yz$ . Целые числа  $m_2, m_3$  изменяются в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Каждое слагаемое в равенстве (2) с конкретным  $j_1$  есть поле, рассеянное соответствующей сеткой; выражение для него получено в [1] при условии достаточно “плотной” сетки, когда  $2\pi/a_2, 2\pi/a_3 > k$  и существует только один мнимый корень  $\sqrt{m} = ik_x$  при  $m_2 = m_3 = 0$  ( $k_x$  – проекция вектора  $\mathbf{k}$  на ось  $x$ ). Кроме этого, здесь и далее исключаются значения вектора  $\mathbf{r}_x$ , лежащие внутри частиц.

Представим амплитуду монополярных колебаний частиц  $a(j_1)$  в виде набора встречных волн, модулирующих амплитуды колебаний частиц

$$\begin{aligned} a(j_1) = & \frac{a_2 a_3 \cos \beta}{2\pi R} \times \\ & \times \sum_{(n_2, n_3=-\infty)}^{\infty} [A_n \exp(-\sqrt{n} a_1 j_1) + B_n \exp(\sqrt{n} a_1 j_1)] \end{aligned} \quad (3)$$

с волновыми числами  $\sqrt{n} = \sqrt{s_n^2 - \eta_n^2}$ , аналогичными  $\sqrt{m}$ , где надо заменить  $m_2, m_3$  на  $n_2$  и  $n_3$ , а параметр  $\eta_n^2 = \eta_{nx}^2 + k_y^2 + k_z^2 = \eta_{nx}^2 + k_{\perp}^2$  отличается от квадрата  $k$  только проекцией на ось  $x$ . Подстановка равенства (3) в (2) дает для поля  $\psi(\mathbf{r}_x)$  выражение

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_x) = & \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_x) + \sum_{n,m} (1/\sqrt{m}) \exp(-is_m \mathbf{r}_{\perp x}) \times \\ & \times \sum_{j_1=0}^{N-1} \exp(-\sqrt{m}|x - a_1 j_1|) \times \\ & \times [A_n \exp(-\sqrt{n} a_1 j_1) + B_n \exp(\sqrt{n} a_1 j_1)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь обозначение суммирования по  $n_2, n_3, m_2, m_3$  заменено на краткое  $n, m$ . Суммирование по  $j_1$  проведем для трех областей по координате  $x$ :  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < x < a_1(N-1)$ ,  $x > a_1(N-1)$ , которые выделяет модуль разности в показателе экспонент  $x - a_1 j_1$ . Для всех областей сумма по  $j_1$  состоит из геометрических прогрессий, ограничен-

ных по числу членов, со знаменателями из функций  $\exp[(\pm\sqrt{m} \pm \sqrt{n})a_1]$ , суммирование которых приводит равенство (4) к виду

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_x, x < 0) = & \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_x) + \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{m}} \exp(\sqrt{m}x - is_m \mathbf{r}_{\perp x}) \times \\ & \times \left\{ A_n \frac{1 - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1 N]}{1 - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1]} + \right. \\ & \left. + B_n \frac{1 - \exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1 N]}{1 - \exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1]} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

для области  $x < 0$ , а для  $x > a_1(N-1)$

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_x, x > a_1(N-1)) = & \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_x) + \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{m}} \exp[-(\sqrt{m}x + is_m \mathbf{r}_{\perp x})] \times \\ & \times \left\{ A_n \frac{1 - \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1 N]}{1 - \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1]} + B_n \frac{1 - \exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1 N]}{1 - \exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1]} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Суммирование в области  $0 < x < a_1(N-1)$  проведем, выделив сетку с номером  $j$  и представив значение  $x$  в виде  $x = a_1 j + x_j$  со значениями  $x_j$  из области

$-a_1 < x_j < a_1$ . После аналогичного суммирования геометрических прогрессий получаем выражение для поля:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_x) = & \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_x) + \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{m}} \exp(-is_m \mathbf{r}_{\perp x}) \left\{ \exp(-\sqrt{m}x_j) \left\{ A_n \frac{\exp(-\sqrt{n}a_1 j) - \exp(-\sqrt{m}a_1 j)}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1} + \right. \right. \\ & + B_n \frac{\exp(\sqrt{n}a_1 j) - \exp(-\sqrt{m}a_1 j)}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} \left. \right\} + \exp(\sqrt{m}x_j) \left\{ A_n \frac{\exp(-\sqrt{n}a_1 j) - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1(N-1) + \sqrt{m}a_1 j]}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} + \right. \\ & \left. + B_n \frac{\exp(\sqrt{n}a_1 j) - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1(N-1) + \sqrt{m}a_1 j]}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1} \right\} + \exp(-\sqrt{m}|x_j|) [A_n \exp(-\sqrt{n}a_1 j) + B_n \exp(\sqrt{n}a_1 j)] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно увидеть, что поле (7) при  $j = 0$  и  $x_j < 0$  совпадает с полем (5), а при  $j = N-1$  и  $x_j > 0$  — с полем (6).

Таким образом, поля вне решетки и в ней между сетками представлены тем же набором волн, что и для одной сетки: бегущих вправо или влево при  $m_2 = m_3 = 0$  и неоднородных (далее прижатых к сеткам), бегущих вдоль сеток при  $m_2 = m_3 \neq 0$ . В решетке появился дополнительный набор волн, модулирующий амплитуду колебаний частиц с волновыми числами  $\sqrt{n}$ . Волновому числу  $\eta_{0x}$  (случай  $n_2 = n_3 = 0$ , а  $\sqrt{n} = i\eta_{0x}$ ) соответствуют волны, бегущие по сеткам. Для  $n_2 = n_3 \neq 0$  получаем опять прижатые волны, но уже к крайним сеткам решетки.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ $A_n, B_n$ И ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ $\sqrt{n}$

Для этого воспользуемся свойством звуковых полей, описываемых скалярным потенциалом (см. [9, 10], а также [1]), заключающимся в том, что

$$\left(1 + S_p R \frac{d}{dr}\right) \langle \psi(\mathbf{r}_{\perp x}, x = a_1 j + x_j) \rangle_{r=R} = 0, \quad (8)$$

т.е. произведение оператора  $1 + S_p R(d/dr)$  на сферическое среднее вокруг частицы по радиусу  $r = \sqrt{r_{\perp x}^2 + x_j^2}$  от полного поля в пределе  $r \rightarrow R$  равно нулю.  $S_p$  — параметр, определяющий свойства монополярных колебаний частицы; он определяется выражением [2]

$$S_p = (3\rho_p/\rho R^2) \left(1/k_p^2 - 4/3q_p^2\right) + 4/R^2 q^2, \quad (9)$$

где  $\rho_p, q_p$  и  $\rho, q$  – плотности и волновые числа сдвиговых или вязких волн в частице и окружающей среде соответственно,  $k_p$  – волновое число продольных волн в частице. Замена  $k_p$ , содержащего, в том числе, и вклад от сдвиговых напряжений, на волновое число  $k_{p0} = (\omega/c_{p0})(1 - i\alpha_p)$ , определяемое только упругостью всестороннего сжатия среды частицы, согласно формуле (7) из [2]:

$$k_p^2 = k_{p0}^2 / (1 + 4k_{p0}^2 / 3q_p^2),$$

дает выражения для  $S_p$ :

$$S_p = 3\rho_p / \rho k_{p0}^2 R^2 + 4/q^2 R^2 = \omega_0^2 (1 + i\alpha_p) / \omega^2 + 4/q^2 R^2 d \quad (10)$$

с параметрами:  $\alpha_p$  – коэффициент внутренних потерь энергии колебаний частицы,  $\omega_0 = (c_{p0}/R)\sqrt{3\rho_p/\rho}$  – собственная частота монопольных колебаний частицы,  $c_{p0} = \sqrt{\gamma_p P_0/\rho_p}$  – адиабатическая скорость звука,  $\gamma_p$  – постоянная адиабаты,  $P_0$  – статическое давление. Интересно, что в (10) отсутствует вклад от волнового числа  $q_p$  сдвиговых волн в упругой частице или вязких – в жидкой.

Сферическое среднее от компонент поля  $\exp[\pm\sqrt{m}x_j \pm is_m \mathbf{r}_{\perp x}]$  по радиусу  $r$  есть  $\sin kr/kr$ , а для среднего от суммы, содержащей  $|x_j|$ , согласно [1] имеем:

$$\left\langle \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} \exp[-\sqrt{m}|x_j| - is_m \mathbf{r}_{\perp x}] \right\rangle_r = \sin kr / ik_x kr + r_0 (r_0 / 2r - 1), \quad (11)$$

где  $r_0 = \sqrt{a_2 a_3 \cos \beta} / \pi$  – радиус круга с площадью, равной площади ячейки сетки. Усреднив поле (7) и умножив результат на оператор  $1 + S_p R(d/dr)$ , получим при  $r = R$

$$M_p \left\{ \exp(-ik_x a_1 j) + \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{m}} \left[ A_n \left( \frac{\exp(-\sqrt{n} a_1 j) - \exp(-\sqrt{m} a_1 j)}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1] - 1} + \frac{\exp(-\sqrt{n} a_1 j) - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1 (N - 1) + \sqrt{m} a_1 j]}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1] - 1} \right) + B_n \left( \frac{\exp(\sqrt{m} a_1 j) - \exp(-\sqrt{m} a_1 j)}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1] - 1} + \frac{\exp(\sqrt{n} a_1 j) - \exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1 (N - 1) + \sqrt{m} a_1 j]}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1] - 1} \right) \right] \right\} + N_p \sum_n [A_n \exp(-\sqrt{n} a_1 j) + B_n \exp(\sqrt{n} a_1 j)] = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$M_p = [1 + S_p R(d/dr)] (\sin kr/kr)_{r=R} = 1 - (1/3) k^2 R^2 S_p, \\ N_p = [1 + S_p R(d/dr)] \times \\ \times [\sin kr / ik_x kr + r_0 (r_0 / 2r - 1)]_{r=R} = \\ = M_p / ik_x + (1 - S_p) r_0^2 / 2R - r_0.$$

Второе значение параметра  $M_p$  получено при условии  $k^2 R^2 \ll 1$ , а оставленное слагаемое  $(1/3) k^2 R^2 S_p$  позволяет совершить переход к частице, состоящей из окружающей среды, когда  $S_p = 3/k^2 R^2$  и  $M_p = 0$  – решетка не рассеивает звук.

В уравнении (12) опять содержится два типа встречных волн, бегущих по сеткам решетки, с волновыми числами  $\sqrt{m}$  и  $\sqrt{n}$ . Поскольку оно должно выполняться для любых номеров  $j$ , то необходимо приравнять нулю коэффициенты перед каждой из этих волн. В результате получаем уравнения для амплитуд  $A_n, B_n$  и волновых чисел  $\sqrt{n}$ . Для волн вида  $\exp(-\sqrt{m} a_1 j)$  и  $\exp(\sqrt{m} a_1 j)$  имеем соответственно:

$$\sum_n \{ A_n / [\exp((\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1) - 1] + \quad (13)$$

$$+ B_n / [\exp((\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1) - 1] \} = \sqrt{m} \delta(m), \\ \sum_n \{ A_n \exp[-\sqrt{n} a_1 (N - 1)] / [\exp((\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1) - 1] + \quad (14)$$

$$+ B_n \exp[\sqrt{n} a_1 (N - 1)] / [\exp((\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1) - 1] \} = 0, \\ \text{где } \sqrt{m} \delta(m) = \begin{cases} ik_x, & m_2 = m_3 = 0, \\ 0, & m_2 = m_3 \neq 0. \end{cases} \text{ Для волн вида}$$

$$\exp(\pm\sqrt{n} a_1 j) \\ \sum_m (1/\sqrt{m}) \{ 1 / [\exp((\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1) - 1] + \quad (15)$$

$$+ 1 / [\exp((\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1) - 1] \} = L - 1/ik_x. \\ \text{Параметр } L \text{ есть}$$

$$L = 1/ik_x - N_p / M_p = [(S_p - 1) r_0^2 / 2R + r_0] / M_p. \quad (16)$$

Замена амплитуд  $A_n, B_n$  на  $F_n^{(\pm)}$  по правилу:

$$A_n = (1/2) (F_n^{(+)} + F_n^{(-)}), \\ B_n = (1/2) \exp[-\sqrt{n} a_1 (N - 1)] (F_n^{(+)} - F_n^{(-)}) \quad (17)$$

упрощает уравнения (13), (14):

$$\sum_n \left\{ \frac{1}{\left[ \exp((\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1) - 1 \right]} \pm \right. \\ \left. \pm \exp[-\sqrt{na_1}(N-1)] / \left[ \exp((\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1) - 1 \right] \right\} \times (18) \\ \times F_n^{(\pm)} = \sqrt{m} \delta(m).$$

Знаки  $\pm$  в скобках соответствуют  $F_n^{(\pm)}$ .

Уравнения (13), (14) дают возможность записать выражения для полей (5)–(7) в более компактном виде. Поле (5) для  $x < 0$  с помощью (14) становится равным

$$\psi(\mathbf{r}_x, x < 0) = \\ = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_x) + \sum_{n,m} (1/\sqrt{m}) \exp(\sqrt{m}x - is_m \mathbf{r}_\perp) \times (19) \\ \times \left\{ \frac{A_n}{1 - \exp(-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1)} + \frac{B_n}{1 - \exp((-\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1)} \right\},$$

а поле (6) с помощью (13):

$$\psi(\mathbf{r}_x, x > a_1(N-1)) = \\ = -\sum_{n,m} (1/\sqrt{m}) \exp\{-[\sqrt{m}(x - a_1(N-1)) + is_m \mathbf{r}_\perp]\} \times (20) \\ \times \left\{ \frac{A_n \exp[-\sqrt{na_1}(N-1)]}{\exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} + \frac{B_n \exp[\sqrt{na_1}(N-1)]}{\exp[-(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} \right\},$$

и, наконец, поле в решетке

$$\psi(\mathbf{r}_x) = \sum_{n,m} (1/\sqrt{m}) \left\{ A_n \exp(-\sqrt{na_1}j) \times \right. \\ \times \left[ \frac{\exp(-\sqrt{m}x_j)}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1} + \frac{\exp(\sqrt{m}x_j)}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} + \right. \\ \left. \left. + \exp(-\sqrt{m}|x_j|) \right] + B_n \exp(\sqrt{na_1}j) \times (21) \\ \times \left[ \frac{\exp(-\sqrt{m}x_j)}{\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1] - 1} + \right. \\ \left. \left. + \frac{\exp(\sqrt{m}x_j)}{\exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1} + \exp(-\sqrt{m}|x_j|) \right] \right\}.$$

Определение констант начнем с решения уравнения (15) для волновых чисел  $\sqrt{n}$  волн, модулирующих амплитуды колебаний частиц. Выделим в нем слагаемое с  $m_2 = m_3 = 0$  или сокращенно  $m = 0$ , когда  $\sqrt{m} = ik_x$ , а  $k_x a_1 \ll 1$ . Это слагаемое преобразуется к выражению  $(1/ik_x)\{-1 + ik_x a_1 / [\cos(k_x a_1) - \text{ch}(\sqrt{na_1})]\}$ . Подставив его в уравнение, получим

$$\frac{1}{\left[ \cos(k_x a_1) - \text{ch}(\sqrt{na_1}) \right]} + \\ + \sum_{m \neq 0} (1/\sqrt{ma_1}) \left\{ \frac{1}{\left[ \exp((\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1) - 1 \right]} + (22) \right. \\ \left. + \frac{1}{\left[ \exp((\sqrt{m} + \sqrt{n})a_1) - 1 \right]} \right\} = L/a_1.$$

Это уравнение определяет волновые числа  $\sqrt{n}$  волн, бегущих по сеткам слоя, в зависимости от частоты  $\omega$ , неявно входящей в параметр  $L$  (16) через  $S_p$  (9).

В отличие от уравнения (15), здесь нет члена  $1/ik_x$ , который играет главную роль в рассеянии звука одной сеткой [1];  $k_x$  входит только через  $k^2$  в волновое число  $\sqrt{m} = \sqrt{s_m^2 - k^2}$ . Значит волны, бегущие по сеткам, не имеют радиационных потерь, пропорциональных  $ik$  и определяемых рассеянием звука отдельной частицей.

Уравнение (22) трансцендентное с неограниченным количеством членов и значений  $\sqrt{n}$ . Решить его приближенно позволяют слагаемые  $1/\left[ \exp((\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1) - 1 \right]$ , которые при  $\sqrt{m} \approx \sqrt{n} = \sqrt{s_n^2 - \eta_n^2}$  и малых  $\eta_n^2$  становятся большими. Наименьший корень уравнения, соответствующий числам  $n_2 = n_3 = 0$  или  $n = 0$  и величине  $\sqrt{n} = i\eta_{0x}$ , определяется в основном первым слагаемым в (22), а в сумме можно заменить  $\sqrt{m}$  на  $s_m$ , т.к.  $s_m^2 \gg k^2$ . Слагаемые в скобках под знаком суммы можно представить в виде двух геометрических прогрессий с показателями  $\exp[-(s_m + i\eta_{0x})a_1]$  и  $\exp[-(s_m - i\eta_{0x})a_1]$ , по модулю меньшими единицы. После записи их в виде рядов уравнение (22) принимает вид

$$\frac{1}{(\cos k_x a_1 - \cos \eta_{0x} a_1)} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos(\eta_{0x} a_1 p) \times (23) \\ \times \sum_{m \neq 0} (1/s_m a_1) \exp(-s_m a_1 p) = L/a_1.$$

Оценить сумму по  $m$  можно заменой суммирования интегрированием по переменной  $\xi = s_m a_1$ , приравняв площадь ячейки  $4\pi^2 a_1^2 / a_2 a_3 \cos \beta = 4\pi a_1^2 / r_0^2$  элементарной площадке интегрирования  $\xi d\xi d\theta$  и исключив из интегрирования площадь  $\pi \xi_0^2 = 4\pi a_1^2 / r_0^2$ . Это дает:

$$\sum_{m \neq 0} (1/s_m a_1) \exp(-s_m a_1 p) \approx \left( r_0^2 / 4\pi a_1^2 \right) \times \\ \times \int_{\xi_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-\xi p) d\theta d\xi = \left( r_0^2 / 2a_1^2 p \right) \exp(-2a_1 p / r_0).$$

Далее будем рассматривать случаи, близкие к условию  $a_1/r_0 \approx 1$ , поэтому можно исключить сум-

му по  $p$ , оставив слагаемое с  $p = 1$  и обозначив его через  $\sigma$ , т.е.

$$\sum_{m \neq 0} (1/s_m a_1) \exp(-s_m a_1) = \tag{24}$$

$$= \sigma \approx (r_0^2/2a_1^2) \exp(-2a_1/r_0).$$

В результате для величины

$$\chi = \cos \eta_{0x} a_1 - \cos k_x a_1 \tag{25}$$

из (23) следует квадратное уравнение  $\chi^2 - (L/2a_1\sigma - \cos k_x a_1)\chi - 1/2\sigma = 0$ . Его корни при  $\cos k_x a_1 \approx 1$  есть

$$\chi_{1,2} = (1/4\sigma) \left\{ L/a_1 - 2\sigma \pm [(L/a_1 - 2\sigma)^2 + 8\sigma]^{1/2} \right\}. \tag{26}$$

Для разрешимости системы уравнений (18) количество членов в каждом должно равняться количеству уравнений, поэтому для каждого волнового числа  $\sqrt{m}$  оставляем одно близкое к нему значение  $\sqrt{n}$ ; в данном случае следует брать значение со знаком “минус”, т.е.  $\chi_2$ .

Рассмотрим случай, когда  $(L/a_1 - 2\sigma)^2 \gg 8\sigma$  и  $\chi_2$  становится равным

$$\chi_2 = -1/(L/a_1 - 2\sigma). \tag{27}$$

В традиционном для теории многократного рассеяния приближении, для малой величины  $\eta_{0x} a_1$  в сравнении с единицей, разложение в ряд косинусов в (25) и замена  $L$  на его значение (16) в (27) дает

$$\eta_0^2 = k^2 + \tag{28}$$

$$+ 3\Phi M_p / R^2 [S_p - 1 + (2R/r_0)(1 - 2M_p a_1 \sigma / r_0)].$$

Здесь  $\Phi = 4R^3/3a_1 r_0^2$  — объемное содержание частиц в среде. К правой и левой частям уравнения добавлен квадрат  $k_{\perp}$  проекции векторов  $\eta_0$  и  $\mathbf{k}$ . Сравним это выражение с формулой (51) из работы [2] для волнового числа  $k_m$  волн, модулирующих средние по ячейке амплитуды колебаний частиц. Она имеет вид

$$k_m^2 = k^2 + 3\Phi M_p / R^2 (S_p - 1 + 3R/2R_m), \tag{29}$$

где  $R_m$  — радиус объема, приходящегося на одну частицу, равный  $R/\Phi^{1/3}$ .

Волновые числа (28) и (29), полученные разными способами, совпадают с большой точностью. Прежде всего, это отсутствие радиационных потерь в колебаниях частиц (заметим, что в [4] эти потери бездоказательно исключены).

Далее, выражения (28), (29) имеют при определенных условиях резонансную структуру, когда реальная часть знаменателей становится равной нулю, а мнимая — малой величиной. В упругой среде для любых частиц резонанса нет (согласно (10), где  $4/q^2 R^2$  всегда больше единицы).

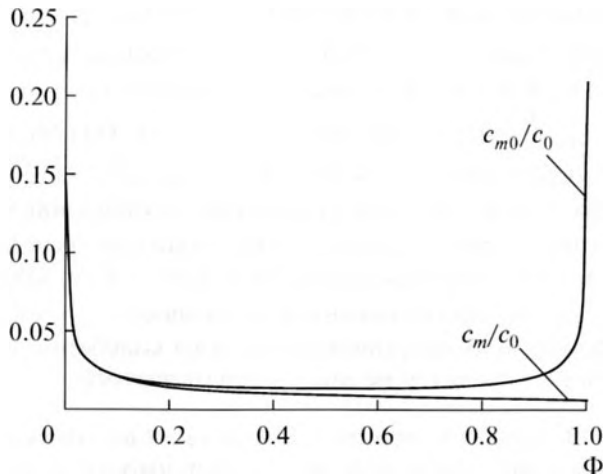
Для пузырьков газа в жидкости, где  $4/q^2 R^2$  становится малой мнимой величиной  $4iv/\omega R^2$  ( $v$  — к-

нематический коэффициент вязкости), реальная часть знаменателя в (28) для малых  $\sigma$  равна  $\omega_0^2/\omega^2 - 1 + 2R/r_0$ , и на резонансной частоте  $\omega = \omega_r = \omega_0/\sqrt{1 - 2R/r_0}$  она обращается в ноль. Из (29) для резонансной частоты имеем  $\omega_r = \omega_0/\sqrt{1 - 3R/2R_m}$ . Оба выражения дают увеличение резонансной частоты, и при условии  $r_0 = 4R_m/3$  они совпадают, а для концентрации частиц  $\Phi = 8/27 \approx 30\%$ , когда  $\omega_r$  уходит на бесконечность, скорость  $c_m = \omega/k_m$  волны, модулирующей амплитуды колебаний частиц, становится не зависящей от частоты.

В наиболее простом случае  $\omega^2 \ll \omega_0^2$  рассмотрим поведение скорости  $c_m$  в зависимости от концентрации частиц  $\Phi$ , тогда  $\eta_0^2 = k_m^2 = k^2 + 3\Phi M_p / R^2 S_p$ . Взяв  $M_p$  из пояснений к равенству (12), а  $S_p$  из первого равенства (10), получим для  $c_m^2$  выражение

$$c_m^2 = \rho_p c_{p0}^2 / \rho [(1 - \Phi) \rho_p c_{p0}^2 / \rho c_0^2 + \Phi]. \tag{30}$$

Здесь также использованы равенства  $k = k_0$  или  $c = c_0$ , справедливые для жидкости с малой вязкостью. Формально справедливое в диапазоне от нуля до единицы изменения концентрации пузырьков в жидкости, выражение (30) показывает монотонное уменьшение скорости от величины  $c_0$  при  $\Phi = 0$  до  $c_{p0} \sqrt{\rho_p/\rho}$  при  $\Phi = 1$ . Это противоречит результату, полученному с помощью квазигомогенной модели [7], где скорость  $c_{m0}$  изменяется от  $c_0$  при  $\Phi = 0$  до  $c_{p0}$  при  $\Phi = 1$ , проходя через минимум в точке  $\Phi \approx 0.5$ , равный  $c_{m0} = 2c_{p0} \sqrt{\rho_p/\rho}$ , причем везде  $c_{m0} > c_m$ . Для объяснения этого противоречия снова обратимся к работе [2]. Там вводится эффективная частица с плотностью  $\rho_m = (1 - \Phi)\rho + \Phi\rho_p$ ; условие равенства давлений на границе частицы и среды потребовало введения эффективного сдвигового волнового числа  $q_m$ , определяемого уравнением (46)  $4/q_m^2 = 4\rho/\rho_m q^2 + 3(1 - \rho/\rho_m)/k_m^2$ , отличного от нуля даже для идеальной жидкости. В результате для числа  $k_m$  получено выражение (29), практически совпадающее с  $\eta_0$  из (28), выведенным напрямую без эффективных величин плотности и волнового числа сдвиговых волн. Переход к результату квазигомогенной модели позволяет выполнить введение эффективного волнового числа  $k_{m0} = \omega/c_{m0}$ , определяемого эффективным всесторонним сжатием среды, по формуле  $k_m^2 = k_{m0}^2 / (1 + 4k_{m0}^2/3q_m^2)$ , аналогичной формуле (7) из [2]. Исключив отсюда  $q_m$ , получим  $1/k_{m0}^2 = \rho/\rho_m k_m^2$  и для скорости



Поведение относительных скоростей  $c_m/c_0$  и  $c_{m0}/c_0$  в зависимости от концентрации  $\Phi$  при значениях параметров  $\rho_p/\rho \approx 10^{-3}$  и  $\rho_p c_{p0}^2/\rho c_0^2 \approx 4.4 \times 10^{-5}$ .

$$c_{m0}^2 = c_{p0}^2 / [(1 - \Phi)\rho/\rho_p + \Phi] \times [(1 - \Phi)\rho_p c_{p0}^2/\rho c_0^2 + \Phi]. \quad (31)$$

В подтверждение к сказанному на рисунке показано поведение относительных скоростей  $c_m/c_0$  и  $c_{m0}/c_0$  в зависимости от концентрации  $\Phi$  при значениях параметров  $\rho_p/\rho \approx 10^{-3}$  и  $\rho_p c_{p0}^2/\rho c_0^2 \approx 4.4 \times 10^{-5}$ .

Таким образом, квазигомогенная модель, в основе которой лежат гидродинамические уравнения, усредненные по достаточно малому объему, учитывает вклад в скорость  $c_{m0}$  из (31) только от модуля всестороннего сжатия среды. Выражение для скорости  $c_m$  из (30), полученное с помощью многократного монопольного рассеяния на частицах как скалярных, так и векторных полей, учитывает дополнительный вклад от эффективных сдвиговых напряжений. Это подтверждается формулой для  $\eta_0$  из (28), полученной без введения эффективных параметров.

Для предельно больших концентраций частиц или частот звука, близких к резонансным, величины  $\eta_0 a_1$  и  $k_m R_m$  перестают быть малыми. В этом случае необходимо решать уравнение (25) с величиной  $\chi_2$  из (26). Записав  $\chi$  через экспоненты и положив  $\cos k_x a_1$  равным единице, получим квадратное уравнение, решение которого есть

$$\exp(i\eta_{0x} a_1)_{1,2} = 1 + \chi_2 \pm [(1 + \chi_2)^2 - 1]^{1/2}.$$

В наиболее простом случае, когда частота колебаний равна резонансной, т. е. выполняется условие  $\text{Re } L/a_1 - 2\sigma = 0$ , и дополнительном условии  $\text{Im}(L/a_1) \ll 8\sigma$ ,  $\chi_2$  становится равной  $-1/\sqrt{2}\sigma$ , а экспонента  $\exp(i\eta_{0x} a_1)_2 = \exp(-i\eta_{0x} a_1) = -\sqrt{\sigma/2}$ . Отсюда получаем для  $\eta_{0x} a_1$  выражение

$$\eta_{0x} a_1 = -\pi + i \ln \sqrt{\sigma/2}. \quad (32)$$

В результате амплитуда  $A_0 \exp(-i\eta_{0x} a_1)$  волны, бегущей между сетками с волновым числом  $k_x$ , получает сдвиг по фазе  $-\pi$  и ослабление в  $\ln \sqrt{\sigma/2}$  раз между ближайшими сетками. Условие резонанса позволяет записать уравнение (50) работы [2] в виде  $(1 - i\delta) \cos k_m R_m - (3 - i\delta) \sin k_m R_m / k_m R_m = 0$  с параметром  $\delta = 4R_m \text{Im} L / r_0^2$ . Представление функций  $\sin$  и  $\cos$  через экспоненты приводит к уравнению  $[ik_m R_m (1 - i\delta) - 3 + i\delta] \exp(2ik_m R_m) = -ik_m R_m (1 - i\delta) - 3 + i\delta$ . Если модуль экспоненты много больше модуля правой части, то выражение в квадратных скобках равно нулю, и получаем

$$k_m R_m = 2\delta - 3i. \quad (33)$$

Условие большой величины модуля экспоненты действительно выполняется ( $\exp 6 \gg 6$ ). Выражения (32) и (33) дают одинаковые по знакам, но отличные по величине и структуре фазовые сдвиги и ослабления волн на расстоянии  $a_1 \approx R_m$ . При этих значениях модулей волновых чисел ( $|\eta_{0x} a_1|$ ,  $|k_m a_1| > 1$ ) становится существенной разница между средними по ячейке полями, рассмотренными в [2], и полями без усреднения, как в настоящей работе.

Перейдем к вычислению волновых чисел  $\sqrt{n} = \sqrt{s_n^2 - \eta_n^2}$  из уравнения (22) с  $n \neq 0$ . В этом случае функции  $\exp[(\sqrt{m} + \sqrt{n}) a_1]$ ,  $\text{ch}(\sqrt{n} a_1) \gg 1$  и уравнение упрощается:

$$\sum_{m \neq 0} 1/\sqrt{m} \{ \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1] - 1 \} = L.$$

Выделим в сумме слагаемое с  $\sqrt{m} = n = \sqrt{s_n^2 - k^2}$ , которое для малых величин  $\eta_n^2/s_n^2$  и  $k^2/s_n^2$  можно записать в виде  $1/\sqrt{m} \{ \exp[(\sqrt{m} = n - \sqrt{n}) a_1] - 1 \} = 2/a_1(\eta_n^2 - k^2)$ , а уравнение запишем так:

$$2/a_1(\eta_n^2 - k^2) = L - U_n, \quad U_n = \sum_{m \neq 0, n} 1/\sqrt{m} \{ \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n}) a_1] - 1 \}. \quad (34)$$

Суммирование в  $U_n$  исключает значения  $m = 0$  и  $m = n$ . Для вычисления суммы перейдем от суммирования к интегрированию по переменной  $\xi = \sqrt{m} a_1$  по аналогии с вычислением суммы в (24):

$$U_n = \frac{r_0^2}{2a_1} \left[ \int_{2a_1/r_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\exp(\xi - \xi_n) - 1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2a_1/r_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \xi d\xi}{\xi_m (\exp(\xi_m - \xi_n) - 1)} \right]. \quad (35)$$

Здесь первый интеграл исключает интегрирование вокруг точки  $m = 0$  и берется в смысле главного значения в окрестности точки  $\xi = \xi_n = \sqrt{na_1}$ , а второй – вклад области вокруг точки  $\xi_n = (s_n \mathbf{n}_y + s_n \mathbf{n}_z) a_1$ . Параметр  $\xi_m$  определяется равенствами:  $\xi_m = \xi + \xi_n$  и  $\xi_m = (\xi_n^2 - 2\xi_n \xi \cos \theta + \xi^2)^{1/2} \approx \xi_n - \xi \cos \theta$ ,  $\pi - \theta$  – угол между векторами  $\xi_n$  и  $\xi$ ,  $\xi_n = s_n a_1$ . Первый интеграл табличный, он равен

$$-\ln[\exp(\sqrt{na_1} - 2a_1/r_0) - 1] = -\sqrt{na_1} + 2a_1/r_0 - \ln\{1 - \exp[(2/r_0 - \sqrt{n})a_1]\}. \quad (36)$$

Второй интеграл в (35) после элементарных преобразований, пренебрежения малой величиной  $\xi^2 \cos^2 \theta / \xi_n^2$  и частичного интегрирования становится равным

$$-\frac{a_1}{\sqrt{nr_0^2}} \left[ 1 + \frac{8}{3\pi\sqrt{nr_0}} + \frac{2r_0^2}{\pi\sqrt{na_1^3}} \times \int_0^{2a_1/r_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \cos \theta d\theta d\xi}{\exp(\xi \cos \theta) - 1} \right].$$

Функция под интегралом  $(\xi \cos \theta) / [\exp(\xi \cos \theta) - 1] = 1 / [1 + \sum_{p=2}^{\infty} (1/p!) (\xi \cos \theta)^p] \leq 1$ . Заменяя ее единицей, получаем значение второго интеграла:  $-(a_1/\sqrt{nr_0^2})(1 + 8/3\pi\sqrt{nr_0} + 2/\sqrt{na_1})$ , малое в сравнении с величиной первого интеграла (36) ( $\sqrt{na_1} \approx s_n a_1 \gg 1$ ), где логарифм также мал. Отбрасывая малые величины, получим

$$U_n = -(r_0^2/2)(\sqrt{n} - 2/r_0). \quad (37)$$

Отметим здесь, что вычисление суммы  $U_n$  имеет более количественный характер, что связано с ее особенностью при  $s_m = s_n$ , которая дает линейную зависимость от радиуса  $2a_1/r_0$ , менее чувствительную, чем экспоненциальная в  $\sigma$  из (24). Выделим у  $\sqrt{n}$  малую величину  $\eta_n^2$ :  $\sqrt{n} = \sqrt{s_n^2 - k^2 - (\eta_n^2 - k^2)} \approx s_n - (\eta_n^2 - k^2)/2s_n$ , тогда  $U_n$  становится равной

$$U_n = U_{n0} + (r_0^2/4s_n)(\eta_n^2 - k^2), \quad (38)$$

$$U_{n0} = -(r_0^2/2)(s_n - 2/r_0).$$

Подставив (38) в (34), получим уравнение для определения  $\eta_n^2 - k^2$ :

$$(\eta_n^2 - k^2)^2 - (4s_n/r_0^2)(L - U_{n0})(\eta_n^2 - k^2) + 8s_n/r_0^2 a_1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$(\eta_n^2 - k^2)_{1,2} = (2s_n/r_0^2) \left\{ L - U_{n0} \pm [(L - U_{n0})^2 - 2r_0^2/s_n a_1]^{1/2} \right\}. \quad (39)$$

Опять, как и в (26), отбросим решение со знаком “плюс”. Но здесь, даже в возможном резонансе ( $|L - U_{n0}| = 0$ ), где  $\eta_n^2 \approx -i\sqrt{8s_n}/r_0\sqrt{a_1}$ , а волновое число  $\sqrt{n} \approx s_n + i\sqrt{2}/r_0\sqrt{a_1 s_n}$ , резонансные свойства этих волн проявляются слабо. Тем не менее, запишем решение (39) вдали от резонанса, раскрывая  $L$  из (16) при  $M_p = 1$  (например, газовые пузырьки в жидкости):

$$\eta_n^2 = k^2 + 4R/a_1 r_0^2 (S_p - 1 + R s_n).$$

Это выражение практически совпадает по форме с  $\eta_0^2$  из (28), но имеет больший сдвиг вверх резонансной частоты ( $\min R s_n \approx 2\pi R/r_0$ ). Таким образом, определены волновые числа  $\sqrt{n}$  волн, модулирующих амплитуды колебаний частиц.

Вычисление амплитуд этих волн начнем с уравнения для  $m = 0$  или  $\sqrt{m} = ik_x$  из системы уравнений (18). В этом уравнении коэффициенты у  $F_{n \neq 0}^{(\pm)}$  равны минус единице, поскольку  $\exp(\sqrt{na_1}) \gg 1$ , поэтому оно упрощается:

$$\{1/[\exp(i(k_x - \eta_{0x})a_1) - 1] \pm \exp[-i\eta_{0x}a_1(N-1)]/[\exp(i(k_x + \eta_{0x})a_1) - 1]\} \times F_0^{(\pm)} - \sum_{n \neq 0} F_n^{(\pm)} = ik_x. \quad (40)$$

Далее, поделим каждое уравнение из системы (18) на  $\sqrt{m}$  и просуммируем их по  $m \neq 0$ . Сумма по  $m$  перед  $F_0^{(\pm)}$  есть  $a_1 \sigma [\exp(i\eta_{0x}a_1) \pm \exp(-i\eta_{0x}a_1 N)]$ , а сумма перед  $F_n^{(\pm)}$ , равная  $\sum_{m \neq 0} 1/\sqrt{m} \{ \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1 \}$ , с помощью уравнения (15) становится равной  $L$  (остальные члены в (15) малы). В результате получаем

$$\sum_{n \neq 0} F_n^{(\pm)} = -(a_1 \sigma / L) [\exp(i\eta_{0x}a_1) \pm \exp(-i\eta_{0x}a_1 N)] F_0^{(\pm)}. \quad (41)$$

Из (40), (41) находим

$$F_0^{(\pm)} = \frac{ik_x \{ \exp[i(k_x - \eta_{0x})a_1] - 1 \}}{\zeta^{(\pm)} \{ 1 + (a_1 \sigma / L) [\exp(ik_x a_1) - \exp(i\eta_{0x} a_1)] \}}, \quad (42)$$

коэффициенты  $\zeta^{(\pm)}$ , определяющие резонансные свойства слоя, имеют вид:

$$\zeta^{(\pm)} = 1 \pm \exp\{-i\eta_{0x}a_1(N-1)\} \frac{\exp[i(k_x - \eta_{0x})a_1] - 1}{\exp[i(k_x + \eta_{0x})a_1] - 1} \times \frac{1 + (a_1 \sigma / L) [\exp(ik_x a_1) - \exp(-i\eta_{0x} a_1)]}{1 + (a_1 \sigma / L) [\exp(ik_x a_1) - \exp(i\eta_{0x} a_1)]}. \quad (43)$$

Подстановка выражений (42) в равенства (17) определяет амплитуды  $A_0$  и  $B_0$ , которые соответствуют, а в случае  $|\eta_{0x}a_1|, |a_1\sigma/L| \ll 1$  равны средним амплитудам колебаний частиц из работы [2].

Формулы для  $F_0^{(\pm)}$  и волнового числа  $\eta_0$  из (25), (26) получены практически без ограничений на концентрацию частиц, как и в работе [2], но без введения эффективных параметров плотности и сдвигового волнового числа. Тем не менее, существует важное отличие этих задач, связанное с влиянием прижатых к сеткам слоя волн, которые исчезают при усреднении в работе [2]. Покажем это на примере отраженного слоя поля  $\exp[i(k_x x - \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)]$  в (19) с волновым числом  $k_x$  и большой концентрацией частиц, удовлетворяющей условию (32). При этом имеем:  $B_n \approx 0$ ,  $\exp(-i\eta_{0x}a_1) = -\sqrt{\sigma/2}$ ,  $\text{Re}L = 2a_1\sigma$ ,  $\text{Im}L \ll 8\sigma$ , а амплитуда  $\psi_k$  отраженного поля равна:  $(1/2ik_x)[F_0^{(+)} + F_0^{(-)} + \sum_{n \neq 0} (F_n^{(+)} + F_n^{(-)})]$ . Подставив сюда величину суммы из равенства (41), получим  $\psi_k = (1/2ik_x)(1 + 1/\sqrt{2\sigma})(F_0^{(+)} + F_0^{(-)})$ . Первое слагаемое во втором множителе дает вклад в отраженное поле от величин  $F_0^{(\pm)}$ , а второе – от  $F_n^{(\pm)}$ , связанных с прижатыми волнами. При условии  $\sigma \ll 1$  влияние прижатых волн на рассеянное поле становится доминирующим, а амплитуда отраженного поля  $\psi_k = -2(1 + 1/\sqrt{2\sigma})/(3 + \sqrt{2/\sigma}) \approx 1$  близкой к единице.

Для вычисления  $F_{n \neq 0}^{(\pm)}$  упростим уравнения (18) с  $m \neq 0$ , отбросив малые вторые слагаемые в фигурных скобках с  $n \neq 0$  и выделив слагаемое  $n = m$ , и получим

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{m}F_m^{(\pm)}/a_1(\eta_m^2 - k^2) + \\ & + \sum_{n \neq 0, m} F_n^{(\pm)} \{ \exp[(\sqrt{m} - \sqrt{n})a_1] - 1 \} = \\ & = -\exp(-\sqrt{m}a_1)\varphi_0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\varphi_0 = [\exp(i\eta_{0x}a_1) \pm \exp(-i\eta_{0x}a_1N)] F_0^{(\pm)}.$$

Представим  $F_n^{(\pm)}$  в виде

$$F_n^{(\pm)} = -\exp(-\sqrt{n}a_1)\varphi_0 \varphi_n / L\sqrt{n} \quad (45)$$

с неизвестной функцией  $\varphi_n$ , для которой из (44) следует уравнение

$$(L - U_m)\varphi_m - \hat{U}_m\varphi_n = L, \quad (46)$$

где множитель  $2/a_1(\eta_m^2 - k^2)$ , согласно (34), заменен на  $L - U_m$ , а

$$\hat{U}_m\varphi_n = \sum_{n \neq 0, m} \varphi_n / \sqrt{n} [\exp((\sqrt{n} - \sqrt{m})a_1) - 1]. \quad (47)$$

Из равенства (45) напрашивается выбор функции  $\varphi_n$ , равной единице, поскольку сумма (45) по  $n \neq 0$  совпадает с суммой из (41). К сожалению, тогда не удовлетворяется уравнение (46), т.к.  $\hat{U}_m\varphi_n = U_m$  и оставшееся в уравнении “нескомпенсированное” слагаемое  $-2U_m$  не равно нулю. Выберем функцию  $\varphi_n$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi_n &= [L^2/(L - U_n)^2][1 + r_0^2/a_1(L - U_n)] \approx \\ &\approx (4a_1^2L^2/r_0^4)[1/(\sqrt{na_1} - \xi_r)^2 + 2/(\sqrt{na_1} - \xi_r)^3], \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\xi_r = (2a_1/r_0)(1 - L/r_0)$ . Функция  $\varphi_n$  в таком виде, после подстановки в (45) и последующего суммирования  $F_n^{(\pm)}$  по  $n \neq 0$ , с переходом к интегрированию по переменной  $\sqrt{na_1} = \xi$  по аналогии с суммой в (24), также обеспечивает выполнение равенства (41). Проверим, удовлетворяет ли она уравнению (46). Преобразуем сначала выражение (47), снова перейдя от суммирования к интегрированию:

$$\hat{U}_m\varphi_n = \frac{r_0^2}{2a_1} \int_{2a_1/r_0}^{\infty} \frac{\varphi_n d\xi}{\exp(\xi - \sqrt{ma_1}) - 1}. \quad (49)$$

Здесь исключен малый вклад от области вокруг точки  $\xi = \sqrt{ma_1}$ , аналогичный второму интегралу в (35). Разбив интеграл на два с граничной точкой  $\xi = \sqrt{ma_1}$ , после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \hat{U}_m\varphi_n &= \frac{r_0^2}{2a_1} \left\{ - \int_{2a_1/r_0}^{\sqrt{ma_1}} \varphi_n d\xi + \int_{\sqrt{ma_1}}^{\infty} \varphi_n \exp(-\xi + \sqrt{ma_1}) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{2a_1/r_0}^{\infty} \frac{\varphi_n \exp(-|\xi - \sqrt{ma_1}|) d\xi}{\exp(\xi - \sqrt{ma_1}) - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Третий интеграл за счет экспоненты в числителе дает в  $\hat{U}_m\varphi_n$  меньший вклад, чем исходный из (49), и его можно отбросить. Оставшиеся интегралы после подстановки второго равенства для  $\varphi_n$  из (48) дают

$$\begin{aligned} \hat{U}_m\varphi_n &= LU_m/(L - U_m) + \\ & + (r_0^2/2a_1)[(L + U_m)/(L - U_m) + 2LU_m/(L - U_m)^2]. \end{aligned}$$

В результате в уравнении (46) после деления его на  $U_m$  остается “нескомпенсированное” слагаемое  $r_0^2/2a_1U_m = 1/a_1(\sqrt{n} = m - 2/r_0)$ , меньшее единицы для всех значений волнового числа  $\sqrt{m}$  и стремящееся к нулю при его увеличении. Значит  $\varphi_n$  из (48) асимптотически при  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$  переходит в точное решение уравнения (46) и более близко к нему во всей области волновых чисел, чем  $\varphi_n = 1$ , когда “нескомпенсированное” слагаемое равно  $-2$ .

Таким образом, вычислены все параметры, определяющие как отраженное и прошедшее через слой поля, так и волновые числа с амплитудами волн, модулирующих амплитуды колебаний частиц.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе без введения эффективной частицы, определяемой радиусом, плотностью и волновым числом сдвиговых волн, подтверждены результаты работы [2]. Уравнение (28) для волнового числа  $\eta_0$  волны, модулирующей колебания частиц в слое, совпадает с уравнением (29), приведенным в работе [2]. В уравнениях отсутствуют радиационные потери энергии колебаний частиц. В случае пузырьков газа в жидкости наблюдается сдвиг резонансной частоты колебаний частиц в сторону увеличения и монотонное уменьшение фазовой скорости этих волн с увеличением концентрации частиц (30). В пределе  $|\eta_{0x} a_1|, |a_1 \sigma / L| \ll 1$  выражение (42) дает амплитуды  $A_0$  и  $B_0$ , равные амплитудам из работы [2].

Следует отметить, что в работе [2] определено не только волновое число  $k_m$ , но и эффективное сдвиговое число  $q_m$ , позволяющее сказать, что даже газожидкостная смесь с монополярным типом колебаний частиц обладает напряжениями сдвига. В настоящей работе нет условий для определения  $q_m$ , но когда  $k_m = \eta_0$ , можно считать  $k_m$  и  $q_m$  в обоих случаях одинаковыми.

Кратко остановимся на основных отличиях традиционного метода решения задач рассеяния звука на дискретных неоднородностях от метода, развиваемого автором настоящей работы. Начиная с работы [5] и вплоть до настоящего времени, подобные задачи решаются с помощью введения двух полей — суммарного поля, рассеянного всеми частицами, и эффективного поля, действующего на выделенную частицу. Основная проблема здесь заключается в определении эффективного поля. Наибольшей популярностью пользуется гипотеза, введенная еще в [5], о равенстве этих полей. В монографии [6] и работе [12] предлагаются попытки ее обоснования, а в работах [7, 8] она замаскирована с помощью квазигомогенного подхода в описании звука в жидкости с пузырьками газа. По мнению автора, эта гипотеза справедлива только для малых концентраций частиц и однократного рассеяния поля на частицах.

Развиваемый автором подход является более универсальным с точки зрения как концентрации частиц, так и типов колебаний отдельной частицы и базируется на сферических средних от полных полей скалярных и векторных потенциалов вокруг частиц и амплитудах их колебаний. В работе [13] по-

казано, что набор из пяти сферических средних от скалярного и векторного потенциалов дает описание монополярного, двух дипольных (от скалярного и векторного потенциалов) и ротационных типов колебаний сферической частицы в вязкой жидкости и в упругой среде. В результате в [9] получены операторы, которые из произвольных полей потенциалов вокруг частицы выделяют компоненты, ответственные за перечисленные типы колебаний, и определяют их амплитуды. В работе [10] дан формализм многократного рассеяния звука в вязкой жидкости или упругой среде, существенно расширяющий возможности этого метода. Там эффективное поле вообще не используется, хотя, в принципе, оно может быть определено.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кобелев Ю.А.* Рассеяние плоской звуковой волны сферическими частицами с монополярным типом колебаний, расположенными в узлах плоской безграничной сетки с одинаковыми ячейками // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 1. С. 3–12.
2. *Кобелев Ю.А.* Многократное рассеяние монополярного типа звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 6. С. 731–740.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
4. *Чабан И.А.* Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // *Акуст. журн.* 1965. Т. 11. № 1. С. 102–109.
5. *Foldy L.L.* The multiple scattering of waves // *Phys. Rev.* 1945. V. 67. № 3, 4. P. 107–119.
6. *Исмару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 317 с. (*Ishimaru A.* Wave propagation and scattering in random media. Vol. 2. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1978.)
7. *Van Wijngaarden L.* One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles // *Annual Review Inc. Pa-lo.* 1972. V. 4. P. 369–396.
8. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
9. *Кобелев Ю.А.* Рассеяние пространственно неоднородных звуковых полей сферической частицей // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 1. С. 21–31.
10. *Кобелев Ю.А.* К теории многократного рассеяния звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 4. С. 443–449.
11. *Чабан И.А.* Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров микронеоднородных сред // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10. № 3. С. 351–358.
12. *Waterman P.C., Truell R.* Multiple scattering of waves // *J. Math. Phys.* 1961. V. 2. № 4. P. 512–537.
13. *Кобелев Ю.А.* Об аналогии процессов линейного рассеяния звука в вязкой жидкости и в изотропной упругой среде // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 6. С. 890–894.